GLOBOIDSCHNECKENLINIEN GLOBOIDISCHE STRAHLENSYSTEME UND REGELFLÄCHEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT

VON

ERNST NEUBAUER
AUS WERNIGERODE

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

HALLE (SAALE)
BUCHDRUCKEREI HOHMANN
1922

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. GUTZMER

Meinen lieben Eltern!

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

I. Abschnitt. Die Globoidschneckenlinien 2

a) Allgemeine globoidische Kurven 2

1. Ihre Gleichungen 2

2. Die Gleichungen der spezialisierten globoidischen Kurven . 5

b) Die Globoidschneckenlinien 5

1. Ihre natürlichen Gleichungen 6

2. Die den Schneckenlinien zugeordneten sphärischen Kurven . 8

3. Kinematische Erzeugung dieser sphärischen Kurven . . . 11

4. Die Projektionen und die zweite kinematische Erzeugung der Schneckenlinien 12

5. Beziehung zur sphärischen Epizykloide und sphärischen Schraubenlinie 15

II. Abschnitt. Globoidische Strahlensysteme 18

a) Das globoidische Strahlensystem im engeren Sinne 18

1. Die Gleichungen des Systems 18

2. Die Kummerschen Fundamentalgrößen 20

3. Grenzpunkte und Hauptflächen 21

4. Brennpunkte und abwickelbare Flächen 22

5. Brennflächen 23

6. Orthogonalflächen des speziellen Systems $\gamma = \frac{\pi}{2}$ 29

b) Tangentenkongruenzen einer Globoidfläche längs der Schneckenlinien 30

1. Die Gleichungen der Systeme 30

2. Die Bedingung dafür, daß sie Normalensysteme sind . . . 31

3. Die Tangentenkongruenz der Kugel längs der Vivianischen Kurven 32

α) Die Kummerschen Fundamentalgrößen 32

β) Brennflächen 33

γ) Abwickelbare Flächen, Grenzpunkte und Hauptflächen . 34

III. Abschnitt. Globoidische Regelflächen 36

1. Ihre Gleichungen und ihre Erzeugung 36

2. Die globoidischen Regelflächen erster Art 38

α) Ihre Gleichungen und ihre sphärischen Bilder 38

β) Der Schnitt mit Kugeln und Ebenen und die Doppellinien 38

γ) Der Verteilungsparameter und die Striktionslinie . . . 42

3. Die globoidischen Regelflächen zweiter und dritter Art . . 45

Einleitung.

Ein Kreis und eine Gerade mit beliebiger Lage im Raume seien fest miteinander verbunden. Dreht sich der Kreis um die Gerade, so beschreibt er eine Rotationsfläche, die nach Reuleaux ein *Globoid* genannt wird.[1]) Bewegt sich gleichzeitig ein Punkt auf dem Kreise, so entsteht eine *allgemeine globoidische Kurve*, die, wenn insbesondere das Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten konstant ist, *Globoidschneckenlinie* heißen soll.

Globoide und globoidische Kurven wurden in der Technik schon verwendet, ehe Reuleaux als erster eine Übersicht und Einteilung der Globoide gab, um ihre Anwendungen auf typische Formen zurückzuführen. Rein technisch ist auch die Arbeit von O. Moog über Globoidschneckengetriebe.[2]) Bezüglich der technischen Einzelheiten und der geschichtlichen Entwicklung dieser Getriebe sei auf die zitierten Werke verwiesen.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die globoidischen Kurven, speziell die Globoidschneckenlinien, sowie gewisse mit ihnen zusammenhängende Fragen, die sich auf Strahlensysteme und Regelflächen beziehen, differentialgeometrisch zu behandeln.

---

[1]) F. Reuleaux, Der Konstrukteur. IV. Aufl. S. 569 ff. — Theoretische Kinematik. II. Bd. S. 678 ff.

[2]) O. Moog, Die Globoidschneckengetriebe. Diss. Hannover 1910.

I. Abschnitt.

Die Globoidschneckenlinien.

a) Allgemeine globoidische Kurven.

1. Ihre Gleichungen.

Durch den Mittelpunkt M des Kreises (Fig. 1) sei senkrecht zur Rotationsachse eine Ebene gelegt, die zur $x'y'$-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems gemacht werden möge, dessen

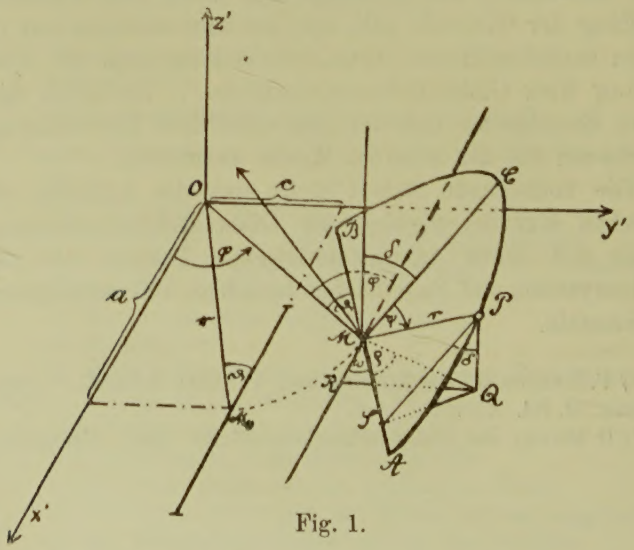

Fig. 1.

positive z'-Achse die Rotationsachse sei. Die allgemeinste Stellung des Kreises ist dann durch drei Angaben charakterisiert. Die Spur AB der Kreisebene mit der $x'y'$-Ebene bilde mit dem Radiusvektor OM den konstanten Winkel ϑ, die Ebene des

Kreises mit der z'-Achse den Winkel δ und der Radiusvektor OM mit der x'-Achse den Winkel φ. Wenn die Spur der Kreisebene der x'-Achse parallel ist, möge M die Koordinaten

$$x' = a, \quad y' = c, \quad z' = 0$$

haben, so daß immer $OM = \mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{r}^2 = a^2 + c^2$ und der Winkel ϑ durch $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{c}{a}$ bestimmt ist. ϑ kennzeichnet die Schiefe, δ die Abplattung des Globoids. Ist a oder c gleich Null, so heißt das Globoid gerade. Der Winkel zwischen MC und dem Radius r sei ψ. Eine zur x'-Achse parallele Gerade durch M bildet in der $x'y'$-Ebene mit OM den Winkel φ, und der Winkel zwischen ihr und MA heiße ω. Es ist $\omega = \varphi - \vartheta$. Schließlich ist $\sphericalangle QMA = \varrho$. Q ist die Projektion von P auf die $x'y'$-Ebene, R der Schnittpunkt der Parallelen zur y'-Achse durch Q mit der Parallelen zur x'-Achse durch M.

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P des Kreises sind dann:

$$\begin{cases} x' = \mathfrak{r} \cos \varphi + r\,(\cos \omega \sin \psi - \sin \delta \sin \omega \cos \psi), \\ y' = \mathfrak{r} \sin \varphi + r\,(\sin \omega \sin \psi + \sin \delta \cos \omega \cos \psi), \\ z' = r \cos \delta \cos \psi. \end{cases}$$

Die Ebene, in der der Minimalabstand der Rotationsachse und der Achse des Kreises, nämlich a (Fig. 2), liegt, möge unter Beibehaltung der z'-Richtung zur neuen xy-Ebene gewählt werden. Die $x'y'$-Ebene wird dadurch parallel zu sich selbst um die Strecke $t = -\frac{c}{\operatorname{cotg} \delta}$ verschoben.

Die *Gleichungen der allgemeinsten Globoidfläche* mittels der Parameter φ und ψ lauten nun:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \mathfrak{r} \cos \varphi + r\,[\sin \psi \cos (\varphi - \vartheta) - \sin \delta \cos \psi \sin (\varphi - \vartheta)], \\ y = \mathfrak{r} \sin \varphi + r\,[\sin \psi \sin (\varphi - \vartheta) + \sin \delta \cos \psi \cos (\varphi - \vartheta)], \\ z = -\frac{c}{\operatorname{cotg} \delta} + r \cos \delta \cos \psi. \end{cases}$$

Die Gleichungen einer beliebigen Kurve auf dieser Fläche, einer *allgemeinen globoidischen Kurve*, ergeben sich durch eine Relation $\psi = \psi(\varphi)$ zwischen den beiden Parametern. Ist ψ eine lineare Funktion von φ, so bestimmt sie die einfachsten Arten der globoidischen Kurven. Diese in der Folge als *Globoid-*

schneckenlinien bezeichneten und ausführlich zu untersuchenden Kurven sind also durch die Beziehung

$$\psi = k\varphi \quad (k = \text{konst.})$$

erklärt.

Aus den Gleichungen (1) folgt:

Die globoidischen Kurven sind Additionskurven einer sphärischen Kurve und eines Kreises. Jeder globoidischen Kurve ist eine sphärische zugeordnet.

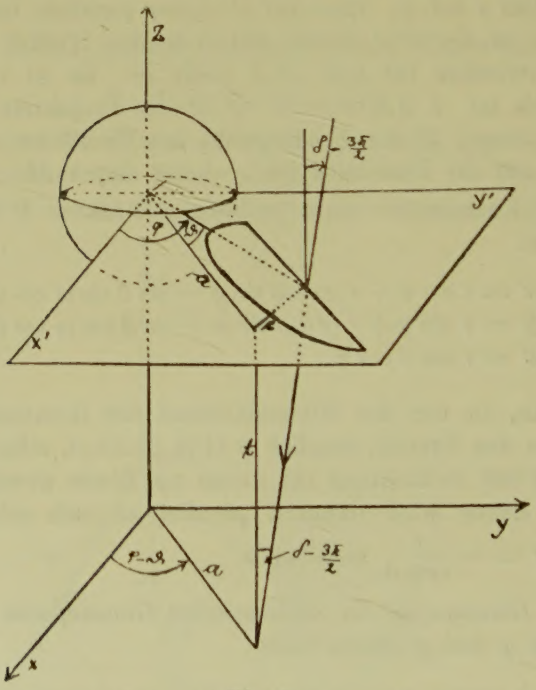

Fig. 2.

Das Umgekehrte gilt nicht.
Ferner ergibt sich ohne weiteres:

Eine zur xy-Ebene parallele Ebene schneidet die globoidische Kurve und die zugeordnete sphärische Kurve in entsprechenden Punkten.

2. Die Gleichungen der spezialisierten globoidischen Kurven.

Die Form des Globoids und damit der globoidischen Kurven hängt wesentlich ab von den drei Konstanten δ, a und c. Die Gleichungen (1) liefern, wenn die Konstanten gleich Null gesetzt werden, noch sieben Sonderfälle. Das vollständige System der globoidischen Kurven bezw. der Globoidschneckenlinien kann folgendermaßen gekennzeichnet werden:

(1) $\delta \neq 0, \quad a \neq 0, \quad c \neq 0;$
(2) $\delta = 0, \quad a \neq 0, \quad c \neq 0;$
(3) $\delta \neq 0, \quad a \neq 0, \quad c = 0;$
(4) $\delta = 0, \quad a \neq 0, \quad c = 0;$
(5) $\delta \neq 0, \quad a = 0, \quad c \neq 0;$
(6) $\delta \neq 0, \quad a = 0, \quad c = 0;$
(7) $\delta = 0, \quad a = 0, \quad c \neq 0;$
(8) $\delta = 0, \quad a = 0, \quad c = 0.$

Aus den Gleichungen (1) und (5) ergibt sich:

Die Ebene des Minimalabstandes der Rotationsachse und der Achse des Kreises fällt mit der Symmetrieebene, die das Globoid im größten Parallelkreise schneidet, zusammen, wenn die Abplattung oder die Schiefe des Globoids gleich Null ist.

Die Fälle (5) bis (8) stellen globoidische Kurven auf Kugeln um den Nullpunkt dar. Die Globoidkurven (5), (6) und (7) und ihre sphärisch zugeordneten Kurven liegen auf konzentrischen Kugeln mit den Radien $\sqrt{r^2 + \left(\frac{c}{\operatorname{cotg} \delta}\right)^2}$ *und* r.

b) Die Globoidschneckenlinien.

Die als Globoidschneckenlinien bezeichneten besonderen globoidischen Kurven sind, wenn k rational ist, algebraische, unikursale Kurven. Ist k irrational, so sind sie transzendent und schlingen sich unendlich oft um das Globoid herum, ohne sich zu schließen.

1. Die natürlichen Gleichungen der Kurven.

Das Bogenelement der Kurven ds ist bestimmt durch

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\Sigma x'^2}.$$

Die Berechnung ergibt:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{E_1 + E_2 \sin k\varphi + E_3 \cos k\varphi + E_4 \cos^2 k\varphi}, \tag{9}$$

worin E_1 bis E_4 konstante Größen sind, die folgende Werte haben:

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathfrak{r}^2 + r^2 (1 + k^2 - 2k \sin\delta), \\ E_2 &= 2\mathfrak{r} r \cos\vartheta (1 - k \sin\delta), \\ E_3 &= -2\mathfrak{r} r \sin\vartheta (k - \sin\delta), \\ E_4 &= -r^2 \cos^2\delta. \end{aligned}$$

Der Krümmungsradius einer Raumkurve ist

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\sqrt{\Sigma x'^2}^3}{\sqrt{\Sigma (y'z'' - z'y'')^2}}.$$

Die Berechnung des Radikanden im Nenner liefert:

$$\begin{aligned} \Sigma(y'z'' - z'y'')^2 = {} & H_1 + H_2 \sin k\varphi + H_3 \cos k\varphi + H_4 \sin k\varphi \cos k\varphi \\ & + H_5 \sin^2 k\varphi + H_6 \sin^3 k\varphi + H_7 \cos^3 k\varphi + H_8 \sin^4 k\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Konstanten sind:

$$\begin{aligned} H_1 = {} & \mathfrak{r}^4 + r^4 (k - \sin\delta)^2 [k^2 (4 + k^2) - 4k \sin\delta (1 + k^2) + \sin^2\delta (1 + 2k^2)] \\ & + \mathfrak{r}^2 r^2 \{k^2 (4 + k^2) - 2k \sin\delta (3 + k^2) + \sin^2\delta (2 + 2k^2 - k^4) \\ & + \sin^2\vartheta [k^2 (5 + 4k) - 2k \sin\delta (4 + 2k + k^2 + 2k^3) \\ & - \sin^2\delta (4 - 4k^3 - k^4)]\}; \\ H_2 = {} & 2 \cos\vartheta \{\mathfrak{r}^3 r (2 + k^2 - 3k \sin\delta) + \mathfrak{r} r^3 [2k^2 (2 + k^2) \\ & - k \sin\delta (6 + 11k^2 + k^4) + 2 \sin^2\delta (1 + 6k^2 + 2k^4) \\ & - 3k \sin^3\delta (1 + k^2)]\}; \\ H_3 = {} & -2\mathfrak{r} r^3 \sin\vartheta \{(2 + k^2 - 2k \sin\delta) k^3 \cos^2\delta + k (5 + 3k^2) \\ & - \sin\delta (4 + 11k^2 + 4k^4) + k \sin^2\delta (6 + 11k^2 + k^4) \\ & - 2k^2 \sin^3\delta (2 + k^2)\}; \\ H_4 = {} & -k \sin 2\vartheta \mathfrak{r}^2 r^2 [2 + 4k + 2k^2 + k^3 - \sin\delta (4 - 8k - 5k^2 - k^4) \\ & + \sin^2\delta (2 + 4k + 2k^2 + k^3)]; \\ H_5 = {} & \mathfrak{r}^2 r^2 \{\cos^2\delta (2 - k^2 - k^4) + \cos^2\vartheta [4 + 4k^3 + k^4 \\ & + k^2 \sin^2\delta (5 + 4k)] - \sin^2\vartheta [k^2 (5 + 4k) + \sin^2\delta (4 + 4k^3 + k^4)] \\ & - 2k \sin\delta \cos 2\vartheta (4 + 2k + k^2 + 2k^3)\}; \end{aligned}$$

$H_6 = 2k(k^2-3)\,\tau r^3 \cos\vartheta \cos^2\delta \sin\delta;$
$H_7 = -2\tau r^3 \sin\vartheta \cos^2\delta\,[k(k^2-3)+2\sin\delta];$
$H_8 = (1-k^2) r^4 \cos^4\delta.$

Die negative Determinante in der Formel für die Torsion:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\sigma}{ds} = -\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} : \Sigma (y'z'' - z'y'')^2$$

hat den Wert:

(11) $K = K_1 + K_2 \sin k\varphi + K_3 \sin k\varphi \cos k\varphi + K_4 \sin^2 k\varphi + K_5 \sin^3 k\varphi.$

K_1 bis K_5 sind konstante Größen, die folgende Werte haben:

$K_1 = k\tau r^2 \cos\vartheta \cos\delta\,[1+k-3k^2-k^4-\sin\delta(1-3k^3)],$
$K_2 = kr\cos\delta\,[\tau^2(1-k^2)+r^2[2k^2(2+k^2)-\sin\delta\,k(5+7k^2)$
$\qquad + \sin^2\delta(1+5k^2)],$
$K_3 = -k\tau r^2 \sin\vartheta \cos\delta\,[k(5+k^2)-2(1-2k^2)\sin\delta],$
$K_4 = -k\tau r^2 \cos\vartheta \cos\delta\,[1-2k^2-2k^4+k(2+k^2)\sin\delta],$
$K_5 = k(1-k^2) r^3 \cos^3\delta.$

Nach (9), (10) und (11) lauten die *natürlichen Gleichungen der Globoidschneckenlinien:*

$$\begin{cases} \varrho_1 = \dfrac{\sqrt{E_1 + E_2 \sin k\varphi + E_3 \cos k\varphi + E_4 \cos^2 k\varphi}^{\,3}}{\sqrt{H_1 + H_2 \sin k\varphi + H_3 \cos k\varphi + H_4 \sin k\varphi \cos k\varphi + H_5 \sin^2 k\varphi + H_6 \sin^3 k\varphi + H_7 \cos^3 k\varphi + H_8 \sin^4 k\varphi}}, \\ \varrho_2 = \dfrac{H_1 + H_2 \sin k\varphi + H_3 \cos k\varphi + H_4 \sin k\varphi \cos k\varphi + H_5 \sin^2 k\varphi + H_6 \sin^3 k\varphi + H_7 \cos^3 k\varphi + H_8 \sin^4 k\varphi}{K_1 + K_2 \sin k\varphi + K_3 \sin k\varphi \cos k\varphi + K_4 \sin^2 k\varphi + K_5 \sin^3 k\varphi}, \\ s = \displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{E_1 + E_2 \sin k\varphi + E_3 \cos k\varphi + E_4 \cos^2 k\varphi}\, d\varphi. \end{cases}$$

Der Bogen s läßt sich als elliptisches Integral bestimmen. Eine einfache Untersuchung zeigt, daß *es keine Globoidschneckenlinie gibt, deren Bogen durch elementare Funktionen ausdrückbar ist.*

2. Die den Globoidschneckenlinien zugeordneten sphärischen Kurven.

Mit Rücksicht auf die zugeordneten sphärischen Kurven bilden die Kurven mit den Gleichungen (2), (4), (7), (8) eine Gruppe und diejenigen mit den Gleichungen (1), (3), (5), (6) die andere Gruppe von Schneckenlinien.

Die Gleichungen der zugeordneten sphärischen Kurven mögen der sphärische Bestandteil der Kurvengleichungen heißen. Es ist also der sphärische Bestandteil von (4) gleich der Kurve (8). Die zugeordneten sphärischen Kurven von (2) und (7) unter-

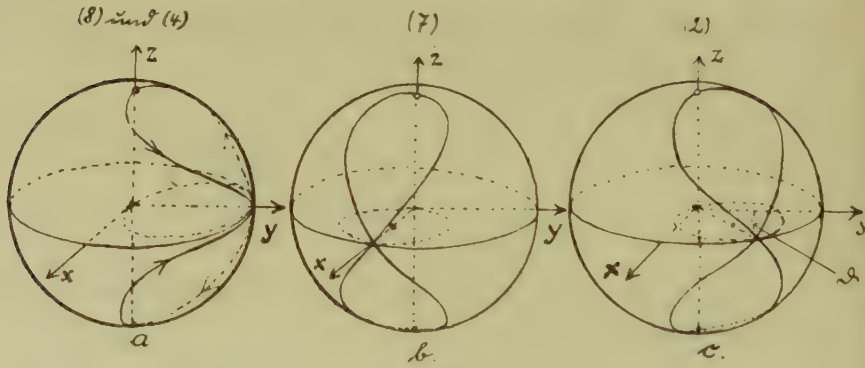

Fig. 3.

scheiden sich von (8) nur durch ihre Lage im Koordinatensysteme. Dreht man die sphärische Kurve von (7) um 90°, so fällt sie mit der Kurve (8) zusammen. Transformiert man den sphärischen Bestandteil der Gleichungen (2)

$$x_1 = r \sin k\varphi \cos(\varphi - \vartheta), \qquad y_1 = r \sin k\varphi \sin(\varphi - \vartheta)$$

mittels

$$x_2 = x_1 \cos\vartheta - y_1 \sin\vartheta, \qquad y_2 = x_1 \sin\vartheta + y_1 \cos\vartheta,$$

so erhält man die beiden ersten Gleichungen (8).

Die zugeordneten sphärischen Kurven der Globoidschneckenlinien liegen so, wie Fig. 3 für $k = 1$ angibt. Entsprechend ist die Lage der zweiten Gruppe von Kurven (3), (5), (6), (1).

Hieraus ergibt sich aber ohne weiteres:

Schneckenlinien auf schiefen und geraden Globoiden haben dieselben zugeordneten sphärischen Kurven.

Die Gleichungen (8) stellen die *Clelien des Guido-Grandi* dar.[1]) Sie sind also die sphärischen Kurven, die den Schneckenlinien (2), (4) und (7) zugeordnet sind. Wird $k = 1$, so geht die spezielle Clelie, die *Vivianische Kurve*, hervor, und wird $k = \frac{1}{4}$, so erhält man die *Spirale des Pappus*. Demnach gilt:

Den Clelien des Guido-Grandi sind drei Arten von Schneckenlinien zugeordnet, die auf nicht abgeplatteten Globoidflächen liegen. (Schiefer und gerader Globoidring und symmetrisch zylindrisch gehöhlter Kugelausschnitt.) *Insbesondere ergeben sich für* $k = 1$ *und* $k = \frac{1}{4}$ *Globoidschneckenlinien, die der Vivianischen Kurve und der Spirale des Pappus zugeordnet sind.*

Die zugeordneten sphärischen Kurven von (1), (3), (5) und (6) sind die Kurven (6), die selbst spezielle Globoidschneckenlinien sind. Man erhält als Gleichung der Projektion des sphärischen Bestandteils von (3) für $k = 1$ auf die xy-Ebene die Gleichung des Kreises:

$$x^2 + \left(y - \frac{1 + \sin\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sin\delta}{2}\right)^2,$$

wenn $r = 1$ gesetzt wird. Die zugeordnete sphärische Kurve ist die Schnittkurve eines Kreiszylinders mit einer Kugel vom Radius 1, also die *Hippopeda des Eudoxus*[2]) oder die *sphärische Lemniskate* nach Schiaparelli.

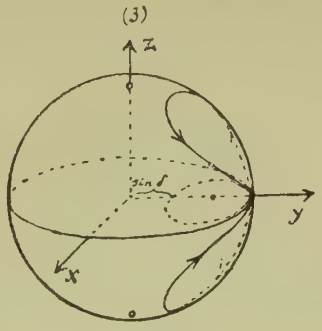

Fig. 4.

Die zugeordneten sphärischen Kurven der Gleichungen (1) und (5) für $k = 1$ unterscheiden sich von der in Fig. 4 gezeichneten nur durch ihre Lage (s. Fig. 3).

Aus den Gleichungen (3) ergeben sich die Gleichungen der Projektion der sphärischen Kurve auf die xy-Ebene, wenn man $r = 1$ annimmt:

---

[1]) G. Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. Tome II. 1909. S. 346. — Guido-Grandi, Flores geometrici ex rhodonearum et claeliarum curvarum descriptione resultantes. Florenz 1728.

[2]) G. Teixeira, a. a. O. S. 324.

$$(12) \qquad \begin{cases} x = \sin k\varphi \cos\varphi - \sin\delta \cos k\varphi \sin\varphi, \\ y = \sin k\varphi \sin\varphi + \sin\delta \cos k\varphi \cos\varphi, \end{cases}$$

oder in Polarkoordinaten

$$\varrho_0 = \sqrt{1 - \cos^2\delta \cos^2 k\varphi}.$$

Diese Gleichungen stellen für $\delta = 0$ die Rosenkurven dar. Die Kurven (12) mögen darum als *verallgemeinerte Rosenkurven* bezeichnet werden. Der Fundamentalkreis der Rosenkurven, d. h. der Ort der Maxima des Radiusvektors, stimmt mit dem der verallgemeinerten Rosenkurven überein. Er möge in bezug auf die verallgemeinerten Kurven der erste Fundamentalkreis heißen; der Ort der Minima des Radiusvektors heiße der zweite Fundamentalkreis.

Der Radius des zweiten Fundamentalkreises der verallgemeinerten Rosenkurven ist gleich dem Sinus des Winkels δ, wenn der Radius des ersten Fundamentalkreises gleich 1 angenommen wird.

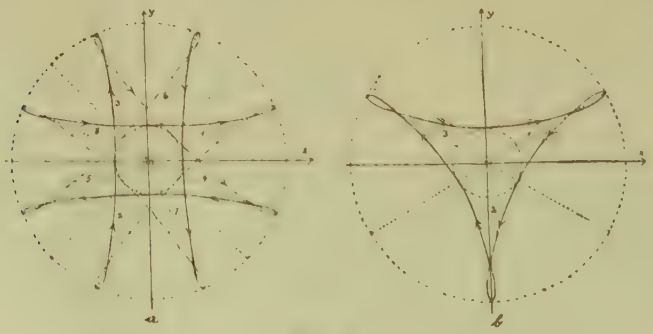

Fig. 5.

Fig. 5 veranschaulicht den Verlauf verallgemeinerter Rosenkurven für $k = 4$ und $k = 3$.

Die zugeordnete sphärische Kurve der Globoidschneckenlinie (3) ist demnach die Schnittkurve einer Kugel mit einem Zylinder, der eine verallgemeinerte Rosenkurve als Orthogonalschnitt besitzt. Diese Kurven mögen *verallgemeinerte Clelien* genannt werden, da sich, wenn $\delta = 0$ wird, die Clelien des Guido-Grandi als Spezialfall ergeben. Fig. 6 mag den Verlauf der verallgemeinerten Clelie für $k = 4$ andeuten.

Die verallgemeinerten Clelien verhalten sich zur Hippopeda des Eudoxus wie die Clelien des Guido-Grandi zur Vivianischen Kurve.

Bezüglich der Blätter und Schichten der verallgemeinerten Clelien gilt dasselbe wie für Rosenkurven.

Die sphärischen Kurven, die den Globoidschneckenlinien (1) und (5) zugeordnet sind, unterscheiden sich von (3) nur durch ihre Lage im Koordinatensystem. Der Fall (6) ist sich selbst sphärisch zugeordnet. Demnach ergibt sich:

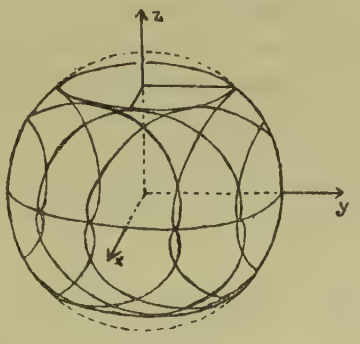

Fig. 6.

Den verallgemeinerten Clelien sind drei Arten von Schneckenlinien zugeordnet, die auf abgeplatteten Globoiden liegen. (Schiefer und gerader Globoidring und symmetrisch konisch gehöhlter Kugelausschnitt.) *Insbesondere ergeben sich für $k = 1$ Globoidschneckenlinien, die der Hippopeda des Eudoxus (sphärischen Lemniskate) zugeordnet sind.*

3. Kinematische Erzeugung der den Schneckenlinien zugeordneten sphärischen Kurven.

Die verallgemeinerten Clelien, die durch (6) dargestellt werden, sind selbst spezielle Globoidschneckenlinien. Sie können also auch durch die Bewegungen hervorgebracht werden, durch die die Schneckenlinien ursprünglich definiert wurden. Daraus ergibt sich:

Rotiert ein Kreis mit konstanter Geschwindigkeit um eine Gerade, die unter einem bestimmten Winkel gegen die Kreisebene durch seinen Mittelpunkt geht und bewegt sich gleichzeitig ein Punkt mit k-facher Geschwindigkeit auf dem Kreise, so beschreibt der Punkt eine verallgemeinerte Clelie mit k-Blättern auf jeder Halbkugel, wenn k eine ganze ungerade Zahl ist und eine solche mit $2k$-Blättern, wenn k ganz und gerade ist. Die Bahnkurve liegt auf dem Mantel eines Zylinders, der als Orthogonalschnitt eine verallgemeinerte Rhodonee hat.

Finden beide Bewegungen mit konstanter und gleicher Geschwindigkeit statt, so ist die Bahnkurve die Hippopeda des Eudoxus.

Fig. 5 deutet den Verlauf der Kurven an. Die punktierten Teile der Kurve verlaufen unterhalb der xy-Ebene.

Ist speziell der Winkel der Drehachse gegen die Kreisebene gleich Null, rotiert also der Kreis um einen Durchmesser, so werden Clelien des Guido-Grandi beschrieben. Ist außerdem $k = 1$, so entstehen Vivianische Kurven (Fig. 3 a).

4. Die Projektionen und die zweite kinematische Erzeugung der Schneckenlinien.

Es werden zunächst die Globoidschneckenlinien (4), (7), (2) betrachtet. Die Gleichungen der Projektion der Kurven (4) auf die xy-Ebene lauten:

$$x = a\cos\varphi + r\sin k\varphi\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi + r\sin k\varphi\sin\varphi.$$

Sie stellen eine gewöhnliche Konchoide dar, deren Basis eine Rhodonee mit dem Fundamentalkreisradius r und deren Pol der Knotenpunkt derselben ist. Die Länge des Zwischenstückes ist a.

Die ähnlichen Gleichungen der Projektionen der Kurven (7) und (2) auf die xy-Ebene stellen schiefe Konchoiden mit Rosenkurven als Basis dar. Das Zwischenstück von der Länge c bezw. r ist unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ bezw. ϑ an den Endpunkt des Radiusvektors anzutragen. φ zählt von der negativen y-Achse an nach der positiven x-Achse zu (Fig. 7).

Werden alle Besonderheiten der Lage der Rosenkurve beiseite gelassen, so gilt:

Die Projektionen von Schneckenlinien nicht abgeplatteter Globoide auf die xy-Ebene sind gewöhnliche Rosenkurvenkonchoiden, wenn das Globoid gerade ist, und schiefe Rosenkurvenkonchoiden, wenn das Globoid schief ist.

Daher schneidet ein Zylinder, dessen Orthogonalschnitt eine Rosenkurvenkonchoide ist, ein nicht abgeplattetes Globoid in einer Schneckenlinie, wenn die Rotationsachse des Globoids mit der Senkrechten im Pole der Konchoide zusammenfällt.

Für $k = 1$ sind die Projektionskurven der Globoidschneckenlinien (2), (4), (7) Pascalsche Schneckenlinien.

Hierauf beruht folgende kinematische Erzeugung der Schneckenlinien selbst:

Durchschneidet ein Strahl nacheinander alle Punkte einer Clelie des Guido-Grandi so, daß er stets senkrecht auf dem vertikalen Durchmesser der Kugel ist, so geht eine Schneckenlinie auf einem nicht abgeplatteten, geraden Globoide hervor, wenn eine konstante Strecke auf der Verlängerung des Strahles über die Clelie hinaus abgetragen wird, und eine solche auf einem schiefen Globoide, wenn die konstante Strecke parallel zur Äquatorebene unter einem konstanten Winkel ϑ im Endpunkte des Strahles angetragen wird. Ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so liegt die Globoidschneckenlinie auf einem zylindrisch gehöhltem Kugelausschnitt.

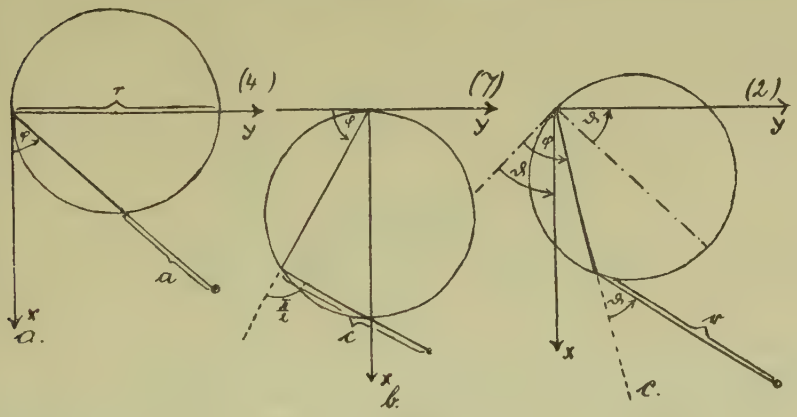

Fig. 7.

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daß sich die sphärischen Leitkurven schon in den in Fig. 3 gezeichneten Normallagen befinden.

Da die Globoidschneckenlinie (7) eine sphärische Kurve ist, folgt:

Wird eine Vivianische Kurve, die auf der inneren Kugel zweier konzentrischen liegt, von einem Strahl, der die Senkrechte auf der Äquatorebene im Doppelpunkte der

Vivianischen Kurve als Leitgerade hat, konchoidal durchlaufen, so schneidet er die äußere Kugel in einer Schneckenlinie, die bei besonderen Annahmen eine sphärische Epizykloide ist.

Die letzte Behauptung wird in der nächsten Nummer bewiesen werden.

Die Gleichungen der Projektion der Globoidschneckenlinie (3) für $k = 1$ auf die xy-Ebene stellen eine Kreiskonchoide, d. h. eine Pascalsche Schneckenlinie, dar, deren Pol die Koordinaten $(0, r \sin \delta)$ hat. Der Basiskreis der Konchoide ist die Projektion der sphärischen Lemniskate auf die xy-Ebene. Die Projektionen

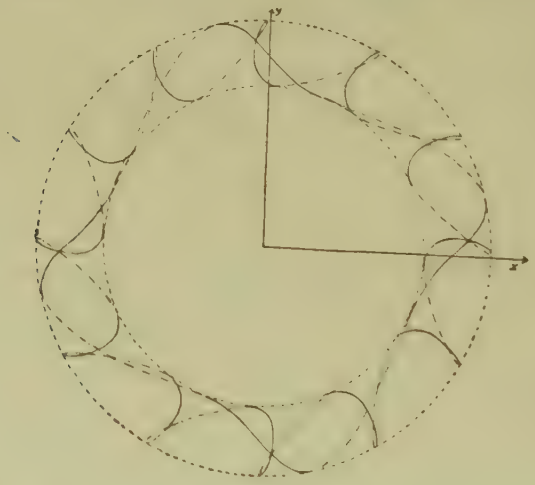

Fig. 8.

der Kurven (5) und (1) für $k = 1$ sind gleichfalls Pascalsche Schneckenlinien, deren Basiskreis, den zweiten Fundamentalkreis in dem Punkte mit den Koordinaten:

$$x = r \sin \vartheta \sin \delta, \quad y = r \cos \vartheta \sin \delta$$

berührt. Da man jede schiefe Kreiskonchoide als gewöhnliche in bezug auf einen anderen Punkt des Kreises als Pol auffassen kann,[1]) ergibt sich:

Die Projektionen von Schneckenlinien abgeplatteter Globoide auf die xy-Ebene sind, wenn $k = 1$ ist, Pascalsche

[1]) H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. Sammlung Schubert. S. 87.

Schneckenlinien, deren Basiskreis den zweiten Fundamentalkreis berührt.

Für die stereometrische und zweite kinematische Erzeugung dieser Schneckenlinien gilt mit passenden Veränderungen der Satz der S. 13. Desgleichen läßt sich die obige Bemerkung auf die sphärische Lemniskate anwenden.

Die Gleichungen der Projektion der Schneckenlinie (3) unterscheiden sich nicht wesentlich von denjenigen der Kurven (1) und (5). In Fig. 8 sind die Projektionen von Schneckenlinien für $k = 4$ und $k = 12$ auf dem Globoide ($a = 4$, $c = 3$, $\delta = 30^0$) angegeben.

5. Beziehung zur sphärischen Epizykloide und sphärischen Schraubenlinie.

Die Kurven (5) sind sphärische Kurven, die bei bestimmten Annahmen sphärische Epizykloiden[1]) sein können.

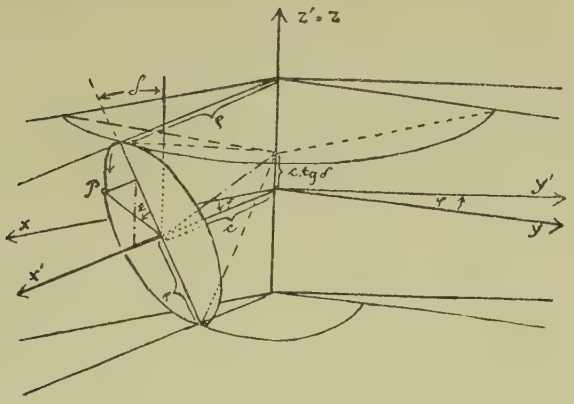

Fig. 9.

Die Gleichungen der Epizykloide stimmen mit den Gleichungen (5) überein, wenn Fig. 9 zugrunde gelegt, das Verhältnis der Radien des festen und des beweglichen Kreises $\frac{\varrho}{r} = k$ gesetzt und von einer Parallelverschiebung der xy-Ebene abgesehen wird.

[1]) G. Teixeira, a. a. O. S. 348. — F. Reuleaux, Theoretische Kinematik. II. Bd. S. 94. (1900).

Aus $k = \frac{\varrho}{r}$ und $\varrho = c + r \sin\delta$ ergibt sich $k = \frac{c}{r} + \sin\delta$. Demnach gilt:

Die Globoidschneckenlinien auf symmetrisch konisch gehöhltem Kugelausschnitt sind nur dann sphärische Epizykloiden, wenn $k = \frac{c}{r} + \sin\delta$ *ist.*

Da die halben Öffnungswinkel der beiden Achsoide der sphärischen Epizykloide bestimmt sind durch

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_r\right) = \frac{r\cos\delta}{c} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_\varrho\right) = \frac{c + r\sin\delta}{r\cos\delta - c\operatorname{tg}\delta},$$

so ergibt sich andererseits:

Rollt auf dem festen Kegel von der Öffnung $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{c + r\sin\delta}{r\cos\delta - c\operatorname{tg}\delta}$ *und dem Grundkreise vom Radius* $c + r\sin\delta$ *ein beweglicher Kegel von der Öffnung* $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{r\cos\delta}{c}$ *und dem Grundkreise vom Radius r gleichmäßig ab, so ist die entstehende Kurve eine Globoidschneckenlinie, die auf einer Kugel vom Radius* $\sqrt{r^2 + \left(\frac{c}{\operatorname{cotg}\delta}\right)^2}$ *liegt.*

Wird $\delta = 0$ [Fall (7)], so vereinfachen sich die Verhältnisse.

Falls $k = 1$ *ist, sind die Globoidschneckenlinien auf symmetrisch konisch bezw. zylindrisch gehöhltem Kugelausschnitte nur dann sphärische Epizykloiden, wenn* $c = r(1 - \sin\delta)$ *bezw.* $c = r$ *ist.*

Dann folgt:

Rollt auf dem festen Kegel von der Öffnung $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\cos\delta}{1 - \sin\delta}$ *und dem Grundkreise vom Radius r ein beweglicher Kegel von derselben Öffnung und demselben Grundkreisradius gleichmäßig ab, so ist die entstehende Kurve eine Globoidschneckenlinie, für die* $k = 1$ *ist und die auf einer Kugel vom Radius* $\frac{r}{\operatorname{cotg}\delta}\sqrt{2(1 - \sin\delta)}$ *liegt.*

Speziell ergibt sich für $\delta = 0$:

Sind die beiden Achsoide Kegel von 90° Öffnung und dem gleichen Grundkreisradius r, so liegt die entstehende Globoidschneckenlinie, für die $k = 1$ *ist, auf einer Kugel vom Radius* $r\sqrt{2}$.

Die Gleichungen der sphärischen Schraubenlinie sind mit den Gleichungen (6) identisch, wenn bei ihrer Aufstellung die Fig. 9 zugrunde gelegt wird, in der man sich aber $c = 0$ gesetzt denken muß, wenn das Verhältnis der Radien des festen und des beweglichen Kreises $\frac{\varrho}{r}$ mit k bezeichnet und $\varrho = r \sin \delta$ gewählt wird. Da die Kurve der Gleichungen (6) sphärischer Bestandteil der Globoidschneckenlinien (1), (3) und (5) ist, so gilt:

Diejenigen Schneckenlinien auf abgeplatteten, geraden oder schiefen Globoiden, für die $k = \sin \delta$ ist, haben als zugeordnete sphärische Kurven Schraubenlinien, deren Achsoide Grundkreise haben mit dem Verhältnis der Radien $\frac{\varrho}{r} = \sin \delta$.

II. Abschnitt.

Globoidische Strahlensysteme.

a) Das globoidische Strahlensystem im engeren Sinne.

1. Die Gleichungen des Systems.

Verbindet man den Schnittpunkt der Kreisachse in der xy-Ebene mit allen Punkten des Kreises (Fig. 2), so entsteht bei der Rotation des Kreises um die z-Achse das *globoidische Strahlensystem* im engeren Sinne.

Die Gleichungen des Rotationskegels mit dem halben Öffnungswinkel ε

$$(1) \qquad x' = t \sin\varepsilon \cos u, \quad y' = t \sin\varepsilon \sin u, \quad z' = t \cos\varepsilon$$

mögen mittels

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{cases}$$

transformiert werden.

Sind α_3, β_3, γ_3 gegebene Größen und die beiden Koordinatensysteme so gegeneinander orientiert, daß sie durch zwei positive Drehungen um die y'- und x-Achse zur Deckung gebracht werden können, so sind die übrigen Richtungskosinus

$$\alpha_1 = \sqrt{1-\alpha_3^2}, \quad \beta_1 = -\frac{\alpha_3\beta_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, \quad \gamma_1 = -\frac{\alpha_3\gamma_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}};$$

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}.$$

Da bei einer Rotation des Kegels (1) um die z-Achse sich sowohl $\sphericalangle(xz')$ als auch $\sphericalangle(yz')$ ändert, nur $\sphericalangle(zz')$ konstant

bleibt, sind noch α_3 und β_3 Funktionen des Winkels v. Nach Fig. 10 sind

$$\alpha_3 = \sin\gamma\cos v, \quad \beta_3 = \sin\gamma\sin v, \quad \gamma_3 = \cos\gamma.$$

Damit erhält man die Richtungskosinus in der endgültigen Form, und aus (2) ergeben sich die Gleichungen eines Strahlensystems, das entsteht, wenn die Achse eines Rotationskegels, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt, um die z-Achse einen Rotationskegel mit der halben Öffnung γ beschreibt.

Der Mittelpunkt des erzeugenden Kegels eines globoidischen Strahlensystems im engeren Sinne liegt auf einer Geraden, die mit der ξ-Achse den Winkel $\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$ bildet (Fig. 11), wenn x, y, z durch ξ, η, ζ ersetzt werden. Der Kehlkreis des Drehhyperboloides der Kegelachsen sei vom Radius 1. Die gesuchten *Gleichungen des globoidischen Strahlensystems* lauten daher:

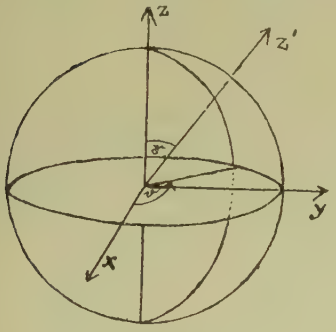

Fig. 10.

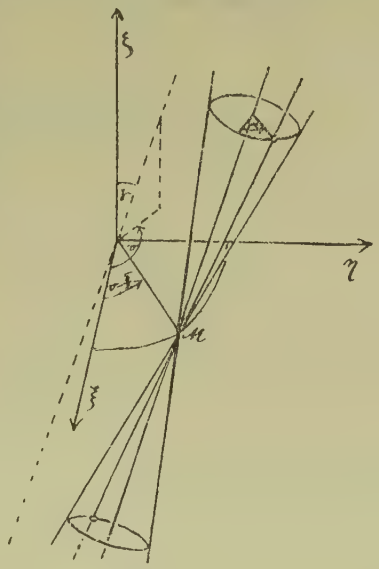

Fig. 11.

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \sin v + t\,[\sin\varepsilon\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}\,\cos u + \cos\varepsilon\sin\gamma\cos v], \\ \eta = -\cos v + t\left[\dfrac{\sin\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}}\,(-\sin^2\gamma\sin v\cos v\cos u + \cos\gamma\sin u) + \cos\varepsilon\sin\gamma\sin v\right], \\ \zeta = t\left[-\dfrac{\sin\varepsilon\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}}\,(\cos\gamma\cos v\cos u + \sin v\sin u) + \cos\varepsilon\cos\gamma\right]. \end{cases}$$

Setzt man $x_0 = \sin v$, $y_0 = -\cos v$ und $z_0 = 0$, so ist damit ein Gleichungssystem gewonnen von der Form:

$$\xi = x_0 + tX, \quad \eta = y_0 + tY, \quad \zeta = z_0 + tZ,$$

in welchem die Richtungskosinus X, Y, Z von den beiden Parametern u und v abhängen.[1])

Die Gleichungen (3) bestimmen für $v =$ konst. einen Strahlenkegel des Systems, für $u =$ konst. ein Rotationshyperboloid.

2. Die Kummerschen Fundamentalgrößen.

Die *Kummerschen Fundamentalgrößen* haben folgende Werte:

$$E_0 = a,$$

$$F_0 = \frac{b\cos^2 v}{1-\sin^2\gamma\cos^2 v} + \frac{c}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}}(\sin u\sin v + \cos\gamma\cos u\cos v),$$

$$G_0 = \frac{d\cos^2 v}{(1-\sin^2\gamma\cos^2 v)^2}(\cos^2\gamma\sin^2 u - \sin^2\gamma\cos^2 u\sin^2 v)$$
$$+ \frac{d}{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}\left[\cos^2 u(1-\cos^2\gamma\cos^2 v) - \frac{1}{2}\cos\gamma\sin 2u\sin 2v\right]$$
$$+ \frac{c\cos v}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}}\left[\cos u - \frac{\sin v(\cos u\sin v - \cos\gamma\sin u\cos v)}{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}\right] + f,$$

$$D = 0, \quad D' = \frac{d'}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}}(\cos u\sin v - \cos\gamma\sin u\cos v),$$

$$D_1' = 0, \quad D'' = \frac{d''\sin^2 v}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v^3}}(\cos u\sin v - \cos\gamma\sin u\cos v).$$

Hierin sind die Konstanten:

$$a = \sin^2\varepsilon, \quad b = -\sin^2\varepsilon\sin^2\gamma\cos\gamma, \quad c = \sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\gamma,$$
$$d = \sin^2\varepsilon\sin^2\gamma, \quad e = -2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin^3\gamma, \quad f = \cos^2\varepsilon\sin^2\gamma,$$
$$d' = -\sin\varepsilon\cos\gamma, \quad d'' = -\sin\varepsilon\sin^2\gamma.$$

Direkte Berechnung oder Spezialisieren dieser Gleichungen liefert die Fundamentalgrößen

für $\gamma = \frac{\pi}{2}$: $E_0 = a$, $F_0 = \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon\sin u$, $G_0 = 1 - a\sin^2 u$;
$D = D_1' = D' = 0$, $D'' = -\sin\varepsilon\cos u$;

für $\gamma = 0$: $E_0 = a$, $F_0 = G_0 = 0$, $D = D_1' = D'' = 0$,
$D' = \sin\varepsilon\sin(u - v)$.

---

[1]) Kommerell, Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Sammlung Schubert. Bd. 62. §§ 21 u. folg.

Das Strahlensystem ist ein Normalensystem, wenn $D' = D_1'$, d. h.:

Das allgemeine globoidische Strahlensystem ist nur dann eine Normalenkongruenz, wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$, *d. h. falls die Achsen der Strahlenkegel zu Tangenten am Kehlkreise des Rotationshyperboloides werden.*[1])

3. Grenzpunkte und Hauptflächen.

Die beiden Grenzpunkte eines Strahles berechnen sich aus der Gleichung:

$$(E_0 G_0 - F_0^2) r^2 - [D'' E_0 - (D' + D_1') F_0 + D G_0] r + D D'' - \left(\frac{D' + D_1'}{2}\right)^2 = 0.$$

Für das globoidische System vereinfacht sich die Gleichung, und es ergeben sich für r die beiden Werte:

$$r_{1,2} = \frac{1}{2 (E_0 G_0 - F_0^2)} (D'' E_0 - D' F_0 \pm \sqrt{D'^2 (E_0 G_0 - F_0^2) + (D'' E_0 - D' F_0)^2}).$$

Für das spezielle globoidische Strahlensystem $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist auch $D' = 0$, dann wird

$$r_1 = \frac{D'' E_0}{E_0 G_0 - F_0^2} = -\frac{\sin \varepsilon}{\cos u}, \qquad r_2 = 0,$$

Die *Differentialgleichung der Hauptflächen*

$$\left(\frac{D' + D_1'}{2} E_0 - D F_0\right) du^2 + (D'' E_0 - D G_0)\, du\, dv + \left(D'' F_0 - \frac{D' + D_1'}{2} G_0\right) dv^2 = 0$$

vereinfacht sich für globoidische Strahlensysteme auf:

---

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven doppelter Krümmung. (1914). S. 169. Übung. Das spezielle globoidische Strahlensystem $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist die Evolutoidenkongruenz eines Kreises.

$$\frac{1}{2} D' E_0 \, du^2 + D'' E_0 \, du \, dv + \left(D'' F_0 - \frac{1}{2} D' G_0 \right) dv^2 = 0.$$

Noch einfacher wird sie für das spezielle System $\gamma = \frac{\pi}{2}$, für das $D' = 0$ ist:

$$D'' E_0 \, du \, dv + D'' F_0 \, dv^2 \quad \text{oder} \quad (E_0 \, du + F_0 \, dv) \, dv = 0,$$

da $D'' \neq 0$ ist. Die letzte Gleichung wird erfüllt

1. für $dv = 0$ und 2. für $E_0 \, du + F_0 \, dv = 0$.

Die Integration liefert:

Die beiden Scharen der Hauptflächen des Systems $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *sind definiert durch*

$$v = \text{konst.} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = e^{-v \operatorname{cotg} \varepsilon + B},$$

es sind Rotationskegel und Tangentenflächen der Evolutoiden der Kongruenz.[1])

B ist eine Integrationskonstante.

Für das System $\gamma = 0$ folgt:

$$\frac{1}{2} D' E_0 \, du^2 = 0 \quad \text{oder} \quad du = 0.$$

Die Hauptflächen sind durch $u = \text{konst.}$ bestimmt. Die beiden Scharen der Hauptflächen fallen zusammen; es sind Rotationshyperboloide, deren Kehlkreise die Ortslinien der Grenzpunkte des Systems sind.

4. Brennpunkte und abwickelbare Flächen.

Die Abstände der Brennpunkte eines Strahles von der Leitfläche berechnen sich aus der Gleichung:

$$\varrho^2 (E_0 G_0 - F_0^2) - \varrho [D'' E_0 - (D' + D_1') F_0 + D G_0] + D D'' - D' D_1' = 0.$$

Da für das globoidische Strahlensystem folgt:

$$\varrho^2 (E_0 G_0 - F_0^2) - \varrho (D'' E_0 - D' F_0) = 0,$$

[1]) Schell-Salkowski, a. a. O. S. 161 u. folg.

sind die beiden Brennpunktsabszissen:

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = \frac{D'' E_0 - D' F_0}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

Der eine Brennpunkt liegt also auf der Leitkurve.

Für das Strahlensystem $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich speziell:

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = \frac{D'' E_0}{E_0 G_0 - F_0^2} = -\frac{\sin \varepsilon}{\cos u}.$$

Die *Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen* eines Strahlensystems lautet in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv, & E_0\,du + F_0\,dv \\ D_1'\,du + D''\,dv, & F_0\,du + G_0\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Sie geht für globoidische Systeme über in:

$$dv\,[(D' F_0 - D'' E_0)\,du + (D' G_0 - D'' F_0)\,dv] = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in

$$1.\ dv = 0 \quad \text{und} \quad 2.\ \frac{du}{dv} = -\frac{D' G_0 - D'' F_0}{D' F_0 - D'' E_0}.$$

Die Integration liefert die Gleichungen der abwickelbaren Flächen des globoidischen Systems.

Da das System $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ein Normalensystem ist, sind die abwickelbaren Flächen mit den Hauptflächen identisch.

5. Brennflächen.

Die Gleichungen der ersten bezw. zweiten Brennfläche ergeben sich, wenn in den Gleichungen des Strahlensystems (3) t durch ϱ_1 bezw. ϱ_2 ersetzt wird. Dann folgt für die erste Brennfläche, da $\varrho_1 = 0$ ist:

$$x_1 = \sin v, \qquad y_1 = -\cos v, \qquad z_1 = 0;$$

d. h. *die erste Brennfläche ist eine Brennlinie, nämlich der Leitkreis des globoidischen Strahlensystems.*

Die Parameterdarstellung der zweiten Brennfläche ist für die weitere Untersuchung unzweckmäßig.

Bevor diese Brennfläche näher untersucht wird, mag noch der Spezialfall $\gamma = \frac{\pi}{2}$ erledigt werden. Die erste Brennfläche artet auch hier in die Brennlinie aus. Ersetzt man in den Gleichungen dieses Systems t durch $-\frac{\sin\varepsilon}{\cos u}$, so gehen die Gleichungen der zweiten Brennfläche hervor:

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \cos^2\varepsilon \sin v - \sin\varepsilon\cos\varepsilon\dfrac{\cos v}{\cos u}, \\ \bar{y}_2 = -\cos^2\varepsilon\cos v - \sin\varepsilon\cos\varepsilon\dfrac{\sin v}{\cos u}, \\ \bar{z}_2 = \sin^2\varepsilon\,\mathrm{tg}\,u. \end{cases}$$

Die zweite Brennfläche des speziellen globoidischen Strahlensystems $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *ist ein einschaliges Rotationshyperboloid mit den Halbachsen* $\cos\varepsilon$ *und* $\sin\varepsilon$.[1])

Nach einem Satze von Chasles, der besagt, daß die gemeinsamen Tangenten zweier konfokalen Flächen zweiten Grades ein Normalensystem bilden, und zwar auch dann, wenn eine oder beide Flächen in Kegelschnitte degenerieren,[2]) würde sich ergeben, daß dieses Strahlensystem eine Normalenkongruenz ist.

Um die zweite Brennfläche des allgemeinen globoidischen Systems zu untersuchen, betrachte man sie als Hüllfläche der ∞^1 kongruenten Rotationskegel der Kongruenzstrahlen, deren Achsen die eine Schar der Erzeugenden des Rotationshyperboloides

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

sind. Die Erzeugenden der einen Schar dieser Fläche

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{b} = \mathrm{tg}\dfrac{v}{2}\left(1 - \dfrac{y}{a}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{v}{2}}\left(1 + \dfrac{y}{a}\right) \end{cases}$$

haben die Richtungskosinus

$$l = \frac{a}{r}\cos v, \quad m = \frac{a}{r}\sin v, \quad n = \frac{b}{r}$$

[1]) Schell-Salkowski, a. a. O. S. 168. 2. Aufgabe.
[2]) Kommerell, a. a. O. S. 163. Nr. 29.

und schneiden die xy-Ebene in dem Punkte

$$x_0 = a \sin v, \quad y_0 = -a \cos v, \quad z_0 = 0.$$

Es ist hierin $r = -\sqrt{a^2 + b^2}$.

Jeder Strahl der Kongruenz schließt mit der Erzeugenden des Hyperboloides den konstanten Winkel ε ein, wenn die Gleichung besteht:

$$a \cos v \cdot x + a \sin v \cdot y + b z = r \cos \varepsilon \sqrt{(x - a \sin v)^2 + (y + a \cos v)^2 + z^2}.$$

Die Gleichung

$$(4) \quad (a \cos v \cdot x + a \sin v \cdot y + b z)^2 = r^2 \cos^2 \varepsilon \, [(x - a \sin v)^2 + (y + a \cos v)^2 + z^2]$$

gibt dann die Darstellung der ∞^1 Rotationskegel der Strahlen. Differentiation nach dem Parameter v liefert eine Gleichung, die mit (4) zusammen die ∞^1 Charakteristiken der Hüllfläche darstellt.

Die bestimmte Charakteristik, die zu $v = \frac{\pi}{2}$ gehört, hat die Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} (a y + b z)^2 = (a^2 + b^2) \cos^2 \varepsilon \, [(x - a)^2 + y^2 + z^2], \\ (a y + b z) x = (a^2 + b^2) \cos^2 \varepsilon \cdot y. \end{cases}$$

Da die Hüllfläche eine Rotationsfläche ist, stimmen alle Charakteristiken, abgesehen von ihrer Lage im Koordinatensysteme, mit dieser überein. Die erste Gleichung (5) stellt einen Kegel dar, dessen Mittelpunkt die Koordinaten hat: $x = a$, $y = z = 0$.

Ehe der allgemeine Fall weiter verfolgt wird, mag insbesondere $b = 0$ gesetzt werden. Dies bedeutet, daß das Rotationshyperboloid der Kegelachsen zur xy-Ebene wird und das globoidische Strahlensystem in die Evolutoidenkongruenz eines Kreises ausartet, also $\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird. Dann werden die Gleichungen (5) zu:

$$\begin{cases} y^2 = \cos^2 \varepsilon \, [(x - a)^2 + y^2 + z^2], \\ x = a \cos^2 \varepsilon. \end{cases}$$

In diesem Falle ist die Charakteristik der Brennfläche eine Kurve zweiter Ordnung, deren Projektion auf die yz-Ebene eine Hyperbel ist mit der Gleichung:

$$\frac{y^2}{(a \sin \varepsilon \cos \varepsilon)^2} - \frac{z^2}{(a \sin^2 \varepsilon)^2} = 1.$$

Demnach gilt der bekannte Satz:

Die Charakteristik der zweiten Brennfläche des speziellen globoidischen Strahlensystems $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *ist eine Hyperbel, die in einer zur* yz*-Ebene parallelen Ebene im Abstande* $a\cos^2\varepsilon$ *liegt und die Halbachsen* $a\sin\varepsilon\cos\varepsilon$ *und* $a\sin^2\varepsilon$ *hat.*[1])

Durch Rotation dieser Hyperbel um die z-Achse geht als Brennfläche das Rotationshyperboloid der S. 24 hervor.

Bezieht man die Gleichungen (5) auf ein Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im alten Systeme die Koordinaten hat: $x = a$, $y = z = 0$, so lautet die zweite Gleichung im neuen Systeme:

$$(a y' + b z')\,(x' + a) = (a^2 + b^2)\cos^2\varepsilon \cdot y'.$$

Transformiert man diese Gleichung mittels:

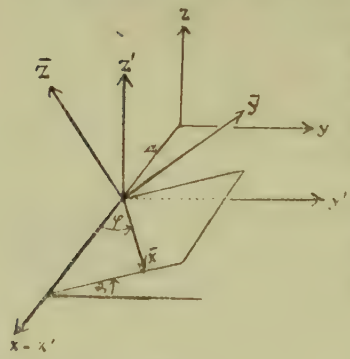

Fig. 12.

$$x' = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi,$$
$$y' = \bar{x}\sin\varphi\cos\vartheta + \bar{y}\cos\varphi\cos\vartheta - \bar{z}\sin\vartheta,$$
$$z' = \bar{x}\sin\varphi\sin\vartheta + \bar{y}\cos\varphi\sin\vartheta + \bar{z}\cos\vartheta,$$

so erkennt man, daß man die Winkel ϑ und φ so wählen muß, daß $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{a}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist, wenn die Gleichung in die Normalform übergehen soll:

$$(6') \qquad \frac{\left(\bar{y} - \frac{a\sin^2\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2}{b\cos^2\varepsilon} - \frac{\left(\bar{x} + \frac{a\sin^2\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2}{b\cos^2\varepsilon} = 2\bar{z}.$$

Bezieht man den durch die erste Gleichung (5) gegebenen Kegel auch auf das $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$-System, so erhält man:

$$(6) \qquad \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y})^2 = \cos^2\varepsilon\,(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2).$$

Die Gleichungen (6) und (6') stellen die Charakteristik der Brennfläche dar. Es ist die Schnittkurve eines Paraboloides mit einem Kreiskegel, dessen Achse in der xy-Ebene liegt (Fig. 12).

Das globoidische Strahlensystem gehört als Spezialfall einer Kongruenz an, die aus ∞^1 kongruenten Rotationskegeln besteht,

[1]) Schell-Salkowski, a. a. O. S. 164 u. folg.

deren Achsen in den rektifizierenden Ebenen einer beliebigen Raumkurve mit ihren Tangenten einen konstanten Winkel bilden. Sie mag als *verallgemeinerte Evolutoidenkongruenz* bezeichnet werden. Wird der konstante Winkel gleich Null, so geht die gewöhnliche Evolutoidenkongruenz hervor. Ist die zugrunde liegende Raumkurve ein ebener Kreis, so liegt das globoidische Strahlensystem vor.

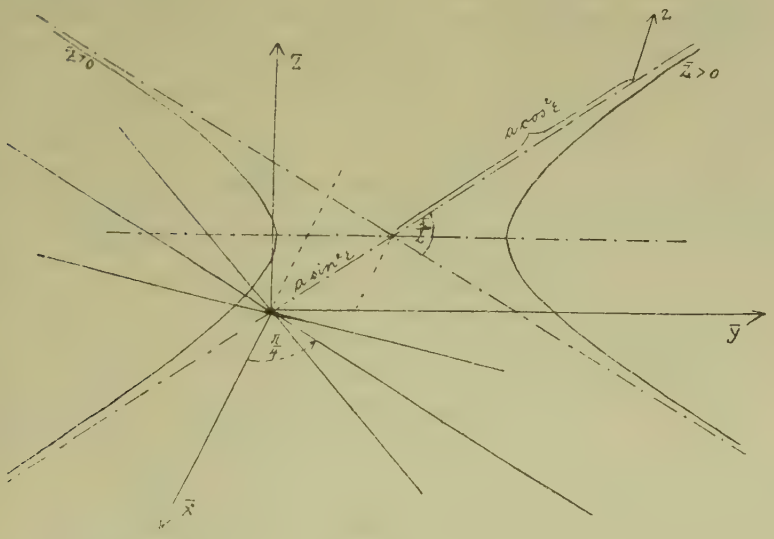

Fig. 13.

Demnach gilt:

Die Charakteristik der Brennfläche der verallgemeinerten Evolutoidenkongruenz ist eine Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies, und zwar die Schnittkurve eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides mit einem Kreiskegel. Für das spezielle globoidische System $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *(gewöhnliche Evolutoidenkongruenz) degeneriert das Paraboloid in zwei zueinander senkrechte Ebenen, von denen die eine durch den Mittelpunkt des Kegels senkrecht zu seiner Achse, die andere parallel zur Achse im Abstande* $a \sin^2 \varepsilon$ *verläuft.*

Die Raumkurve vierter Ordnung besitzt zwei reelle Asymptoten, die mit denen der ebenen Hyperbel (S. 25) übereinstimmen.

Sie kann verschiedene Formen annehmen, je nachdem Singularitäten auftreten oder nicht. Der einzige Punkt der Kurve, der singulär sein könnte, ist der Nullpunkt des $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-Systems (Fig. 13). Eine einfache Untersuchung der Gleichungen (6) und (6') zeigt, daß die Kurve einen Doppelpunkt hat, wenn $\varepsilon > \frac{\pi}{2} - \gamma$, und einen isolierten Punkt, wenn $\varepsilon < \frac{\pi}{2} - \gamma$ ist. Im letzten Falle besteht die Schnittkurve außer dem isolierten Punkte aus zwei getrennten Kurvenzweigen. Wächst ε, so ziehen sich die beiden Zweige nach dem Kegelmittelpunkt zusammen, bis dieser, wenn $\varepsilon > \frac{\pi}{2} - \gamma$, zum Doppelpunkt der Kurve wird.

Wenn sich die beiden Flächen längs einer Erzeugenden berühren, also $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \gamma$ ist, so wird die Gleichung der Tangentialebene des Paraboloides im Nullpunkte des $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-Systems:

$$a \sin^2\varepsilon \cdot \xi + a \sin^2\varepsilon \cdot \eta + \sqrt{2}\, b \cos^2\varepsilon \cdot \zeta = 0.$$

Sie ergibt, daß aus

$$\cos\bar{\gamma} = \frac{b \cos^2\varepsilon}{\sqrt{a^2 \sin^4\varepsilon + b^2 \cos^4\varepsilon}}$$

nur dann $\bar{\gamma} = \varepsilon$ folgt, wenn $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varepsilon$ genommen wird.

Bei diesem Werte von ε zerfällt die Raumkurve in *eine Gerade*, die gemeinsame Erzeugende der beiden gradlinigen Flächen, und in eine Raumkurve dritter Ordnung, die, da sie eine Asymptote besitzt, der sie sich in entgegengesetzten Richtungen von verschiedenen Seiten nähert, nur *eine kubische Ellipse* sein kann. Die Gerade berührt die Ellipse im Scheitelpunkt.

Die drei möglichen Formen der charakteristischen Raumkurve vierter Ordnung lassen sich auch folgendermaßen unterscheiden:

1. Schneidet die Tangentialebene des Paraboloides im Kegelmittelpunkte den Kegel in zwei Geraden, so hat die Kurve einen Doppelpunkt;

2. berührt die Ebene den Kegel, d. h. hat sie eine Gerade mit ihm gemeinsam, so zerfällt die Kurve;

3. schneidet die Ebene den Kegel nur im Mittelpunkte, so hat die Kurve einen isolierten Punkt.

In dem ursprünglichen xyz-Systeme ist die xy-Ebene die Tangentialebene des Paraboloides.

Demnach gilt:

Die Brennfläche der verallgemeinerten Evolutoidenkongruenz kann drei wesentlich verschiedene Formen annehmen, je nachdem die Raumkurve vierter Ordnung, aus deren Bewegung die Fläche hervorgeht, einen isolierten Punkt hat, der auf der Grundkurve liegt, einen Doppelpunkt besitzt oder in eine Gerade und eine kubische Ellipse zerfällt. Die Fläche besteht dann 1. aus zwei getrennten Mänteln, 2. aus einer längs der Grundkurve sich selbst schneidenden Fläche, 3. aus der Tangentenfläche der Grundkurve und der Fläche, die durch Bewegung einer kubischen Ellipse hervorgeht und die Tangentenfläche in der Grundkurve schneidet. Die drei Fälle treten ein, je nachdem die Schmiegungsebene den erzeugenden Strahlenkegel nur im Mittelpunkte schneidet, in zwei Geraden schneidet oder ihn längs der Tangente der Grundkurve berührt.

Die eine Schar der abwickelbaren Flächen sind die Strahlenkegel selbst. *Die Gratlinien der zweiten Schar von abwickelbaren Flächen* liegen auf der Brennfläche, sie mögen *verallgemeinerte Evolutoiden* heißen.

Dann gilt:

Die verallgemeinerten Evolutoiden und die charakteristischen Raumkurven vierter Ordnung erster Art bilden auf der Brennfläche der verallgemeinerten Evolutoidenkongruenz ein konjugiertes Kurvensystem.

Die Grundkurve ist Brennlinie der Kongruenz.

Ist speziell die Grundkurve ein ebener Kreis und die Bewegung eine Rotation um die Achse dieses Kreises, so geht die Brennfläche des allgemeinen globoidischen Strahlensystems hervor.

6. Orthogonalflächen des speziellen Systems $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Die Abszisse eines Punktes der Orthogonalfläche, die aus der Gleichung

$$t = -\int \left[\left(\Sigma X \frac{\partial x_0}{\partial u} \right) du + \left(\Sigma X \frac{\partial x_0}{\partial v} \right) dv \right] + \text{konst.}$$

zu berechnen ist, hat den Wert

$$t = -\cos\varepsilon \int dv + \text{konst.} = av + C.$$

Die Gleichungen der Orthogonalflächen lauten daher:

$$\begin{cases} x_3 = \sin v + (av + C)(\sin\varepsilon \sin v \cos u + \cos\varepsilon \cos v), \\ y_3 = -\cos v - (av + C)(\sin\varepsilon \cos v \cos u - \cos\varepsilon \sin v), \\ z_3 = -(av + C) \sin\varepsilon \sin u. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(x_3 - \sin v)^2 + (y_3 + \cos v)^2 + z_3^2 = (av + C)^2.$$

Betrachtet man v als Parameter, so stellt diese Gleichung eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Kugeln dar.

Die einhüllenden Flächen dieser Kugelscharen sind die gesuchten Orthogonalflächen. Es gilt also:

Die Orthogonalflächen des speziellen globoidischen Strahlensystems $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *sind* ∞^1 *parallele Kanalflächen mit einem ebenen Kreise als Leitkurve. Der eine Mantel der Zentrafläche reduziert sich auf die Leitkurve. Die eine Schar der Krümmungskurven sind die Schnittkreise der Strahlenkegel mit den Orthogonalflächen, die andere Schar sind die Orthogonaltrajektorien der ersten Kurvenschar.*[1])

b) Tangentenkongruenzen einer Globoidfläche längs der Schneckenlinien.

1. Die Gleichungen der Systeme.

Rotiert eine Schneckenlinie mit ihren ∞^1 Tangenten um die Globoidachse, so bildet die Gesamtheit der ∞^2 Tangenten die *Tangentenkongruenz eines Globoides längs der Schneckenlinien.*

Die Gleichungen einer Schar von Schneckenlinien auf einem geraden, nicht abgeplatteten Globoide (Fall [4] S. 5) sind:

$$\begin{cases} x = a\cos(\varphi + v) + r \sin k\varphi \cos(\varphi + v), \\ y = a\sin(\varphi + v) + r \sin k\varphi \sin(\varphi + v), \\ z = r\cos k\varphi, \end{cases}$$

[1]) Schell-Salkowski, a. a. O. S. 169, Übung.

wenn der zweite Parameter v der Winkel ist, um den die Ausgangskurve gedreht werden muß, um mit einer anderen zusammenzufallen.

Die Gleichungen der Tangentenkongruenz längs dieser Schneckenlinien sind:

$$(7)\quad \begin{cases} \xi = a\cos(\varphi+v) + r\sin k\varphi\cos(\varphi+v) \\ \quad + t\dfrac{-a\sin(\varphi+v) + r[k\cos k\varphi\cos(\varphi+v) - \sin k\varphi\sin(\varphi+v)]}{\sqrt{a^2 + 2ar\sin k\varphi + r^2(k^2+\sin^2 k\varphi)}}, \\ \eta = \ldots, \quad \zeta = \ldots \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen der *Tangentenkongruenz einer Einheitskugel längs der Clelien des Guido-Grandi*:

$$(8)\quad \begin{cases} \xi = \sin k\varphi\cos(\varphi+v) \\ \quad + t\dfrac{(k-1)\cos k\varphi\cos(\varphi+v) + \cos[(k+1)\varphi+v]}{\sqrt{k^2+\sin^2 k\varphi}}, \\ \eta = \sin k\varphi\sin(\varphi+v) \\ \quad + t\dfrac{(k-1)\cos k\varphi\sin(\varphi+v) + \sin[(k+1)\varphi+v]}{\sqrt{k^2+\sin^2 k\varphi}}, \\ \zeta = \cos k\varphi - t\dfrac{k\sin k\varphi}{\sqrt{k^2+\sin^2 k\varphi}}. \end{cases}$$

In gleicher Weise lassen sich die Gleichungen der Kongruenzen eines allgemeinen Globoids (Fall [1] S. 5) aufstellen.

Da sämtliche Strahlen der Kongruenz die Globoidfläche berühren, ist diese eine der beiden Brennflächen und da sich benachbarte Strahlen in einem Punkte der Schneckenlinie schneiden und diese dort berühren, sind die Tangentenflächen der Kurven die eine Schar der abwickelbaren Flächen der Kongruenz.

Ist v bezw. $\varphi =$ konst., so stellen die Gleichungen (7) und (8) die zur Schneckenlinie $v =$ konst. zugehörige Tangentenfläche bezw. ein einschaliges Rotationshyperboloid dar.

2. Die Bedingung dafür, daß die Tangentenkongruenzen Normalensysteme sind.

Allgemein sind die Tangentenkongruenzen einer beliebigen Fläche längs gewisser Kurven dann Normalensysteme, wenn diese geodätische Linien der Fläche sind. Die Normalen einer

Rotationsfläche schneiden die Achse und längs der Geodätischen fallen sie mit den Hauptnormalen dieser Kurven zusammen. Ihre Gleichungen lauten:

$$x_2 = x + lt, \quad y_2 = y + mt, \quad z_2 = z - nt.$$

Dann ist die Bedingung dafür, daß die Tangentenkongruenz ein Normalensystem ist

$$xm - yl = 0.$$

Aus den Gleichungen der globoidischen Kurven (4) S. 5 und den Richtungskosinus l und m ergibt sich folgende Bedingungsgleichung für $\psi(\varphi)$:

$$\begin{aligned} & a^3 r \cos\psi + a^2 r^2 (3 \sin\psi \cos\psi - \psi'') \\ & \quad + a r^3 (2\psi'^2 \cos\psi - 3 \sin^2\psi \cos\psi - \psi'' \sin\psi) \\ & \quad + r^4 (\psi'^2 \sin 2\psi + \sin^3\psi \cos\psi - \psi'' \sin^2\psi) = 0. \end{aligned}$$

Demnach gilt:

Damit die Tangentenkongruenz eines nicht abgeplatteten geraden Globoids längs globoidischer Kurven ein Normalensystem bildet, ist erforderlich, daß die Funktion $\psi(\varphi)$ der obigen Differentialgleichung genügt.

Die Globoidschneckenlinien genügen der Gleichung nicht; *die Tangentenkongruenzen längs dieser Kurven sind daher keine Normalensysteme.*

3. Die Tangentenkongruenz der Kugel längs der Vivianischen Kurven.

a) Die Kummerschen Fundamentalgrößen.

Die Gleichungen der Tangentenkongruenz längs der Vivianischen Kurven folgen aus den Gleichungen (3) für $k = 1$.

Für die Kummerschen Fundamentalgrößen ergeben sich folgende Werte:

$$(9)\quad \begin{cases} E_0 = \dfrac{5 + 3\sin^2\varphi}{(1 + \sin^2\varphi)^2}, \quad F_0 = \dfrac{2}{1 + \sin^2\varphi}, \quad G_0 = \dfrac{1}{1 + \sin^2\varphi} = 2F_0; \\ D = 0, \quad D' = -\dfrac{\sin 2\varphi \cdot (2 - \sin^2\varphi)}{2\sqrt{1 + \sin^2\varphi}^3}, \quad D_1' = 0, \\ D'' = -\dfrac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich dann die Ausdrücke:

$$E_0 G_0 - F_0^2 = \frac{\cos^2\varphi}{(1+\sin^2\varphi)^3}, \quad D'' E_0 - D' F_0 = -\frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1+\sin^2\varphi}^3}.$$

β) Brennflächen.

Zur Bestimmung der Abszissen der Brennpunkte ϱ_1 und ϱ_2 dienen die Formeln der S. 23. Durch Ausrechnung erhält man:

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = -\operatorname{tg}\varphi\,(1+\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}.$$

Die erste Formel ergibt die geometrisch selbstverständliche Tatsache, daß die erste Brennfläche die Kugel ist.

Die *Gleichungen der zweiten Brennfläche sind:*

$$\begin{cases} \xi_2 = \sin\varphi\left[\cos(\varphi+v) - \cos(2\varphi+v)\,\dfrac{1+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right], \\ \eta_2 = \sin\varphi\left[\sin(\varphi+v) - \sin(2\varphi+v)\,\dfrac{1+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right], \\ \zeta_2 = \dfrac{1+\sin^4\varphi}{\cos\varphi} \end{cases}$$

und stellen eine Rotationsfläche dar.

Die Linien $u = konst.$ sind auf beiden Brennflächen Parallelkreise. Die Linien $v = konst.$ sind auf der ersten Brennfläche, der Kugel, Vivianische Kurven.

Die *Gleichungen der Linie $v = 0$ auf der zweiten Brennfläche* folgen aus den Gleichungen dieser Fläche:

$$\bar{\xi} = \frac{2\sin^5\varphi}{\cos\varphi}, \quad \bar{\eta} = -\sin^2\varphi\,(1+2\sin^2\varphi), \quad \bar{\zeta} = \frac{1+\sin^4\varphi}{\cos\varphi}.$$

Bezüglich des Verlaufs der Linie $v = 0$ siehe die gestrichelte Kurve der Fig. 14 und 15. Die Meridiankurve, deren Gleichungen:

$$\bar{\xi}_0 = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1+3\sin^2\varphi}, \quad \bar{\zeta}_0 = \frac{1+\sin^4\varphi}{\cos\varphi}$$

sind, wird durch die hyperbelartige Kurve der Fig. 15 dargestellt. Demnach ergibt sich:

Die beiden Mäntel der zweiten Brennfläche haben ein gleichseitiges Rotationshyperboloid als Asymptotenfläche. Jede Linie $v = konst.$ besitzt eine Ebene im Abstande 3 von der Rotationsachse als Asymptotenebene.

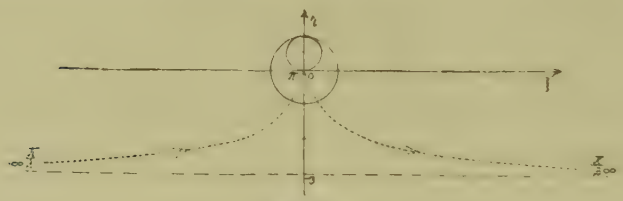

Fig. 14.

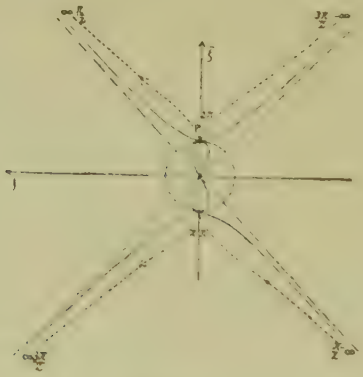

Fig. 15.

γ) Abwickelbare Flächen, Grenzpunkte und Hauptflächen.

Wegen $D = D_1' = 0$ vereinfacht sich die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen wie auf S. 23. Man erhält:

$$1.\ dv = 0 \quad \text{und} \quad 2.\ \frac{d\varphi}{dv} = -\frac{\sin^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}.$$

Die Integration liefert:

Die eine Schar der abwickelbaren Flächen sind die Tangentenflächen der Vivianischen Kurven, die andere sind die Flächen, für die $v = -\varphi + \operatorname{cotg}\varphi + C$ *ist.*

C ist eine Integrationskonstante.

Für die Abszissen der Grenzpunkte (S. 21) erhält man:

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\left[(1+\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \pm (5+3\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Die Differentialgleichung der Hauptflächen ist:

$$\frac{d\varphi}{dv} = -\frac{1}{2+\sin^2\varphi}\left[1+\sin^2\varphi \pm \sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{5+3\sin^2\varphi}}\right].$$

Der Abstand der Brennpunkte δ' ist gleich $\operatorname{tg}\varphi\cdot(1+\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}$ und der Abstand der Grenzpunkte d ist gleich $\operatorname{tg}\varphi\cdot(5+3\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$. Da der Winkel Ω der Brennebenen bestimmt ist durch

$$\sin\Omega = \frac{\delta'}{d},$$

erhält man

$$\sin\Omega = (1+\sin^2\varphi)\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{5+3\sin^2\varphi}}.$$

Für $\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ rücken die Brennpunkte und die Grenzpunkte ins Unendliche, und Ω wird gleich $\frac{\pi}{2}$. Demnach gilt:

Die ∞^1 Strahlen, die die Tangenten in den Doppelpunkten der Vivianischen Kurven sind, berühren die zweite Brennfläche im Unendlichen und die Paare ihrer Brennebenen stehen senkrecht aufeinander.

III. Abschnitt.

Globoidische Regelflächen.

1. Ihre Gleichungen und ihre Erzeugung.

Das globoidische Strahlensystem im engeren Sinne enthält ∞^1 Strahlen, die durch die Punkte einer globoidischen Kurve und die zugehörigen Punkte des Leitkreises der Kongruenz gehen. Diese Strahlen bilden die *globoidische Regelfläche*. Im folgenden werden aber nur solche Flächen betrachtet, deren zugeordnete globoidische Kurven Schneckenlinien sind. Die Gleichung $\Phi(u, v) = 0$, die in Verbindung mit den Gleichungen (3) der S. 19 eine Regelfläche definiert, ist dann speziell

$$u = \psi(v) = k\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$$

(Fig. 11). Ist $k = 1$, so ergeben sich die Gleichungen der Regelflächen:

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \sin v + t\left[\sin\varepsilon\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}\cdot\sin v + \cos\varepsilon\sin\gamma\cos v\right], \\ \eta = -\cos v + t\left[\dfrac{-\sin\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}}(\sin^2\gamma\sin^2 v\cos v + \cos\gamma\cos v) + \cos\varepsilon\sin\gamma\sin v\right], \\ \zeta = t\left[\dfrac{-\sin\varepsilon\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2 v}}(\cos\gamma\cos v\sin v - \sin v\cos v) + \cos\varepsilon\cos\gamma\right]. \end{cases}$$

Die dieser globoidischen Regelfläche als Leitkurve dienende Schneckenlinie liegt auf einem abgeplatteten Globoide beliebiger Schiefe. Solche Regelflächen stellen die höchsten Formen dar, sie mögen *globoidische Regelflächen dritter Art* heißen.

Liegt die zugehörige Globoidschneckenlinie auf einer nicht abgeplatteten Fläche, was eintritt, wenn der Neigungswinkel

$\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird, dann soll die *Regelfläche von der zweiten Art* heißen. Die Erzeugenden dieser Regelflächen gehören der Evolutoidenkongruenz eines Kreises an.

Wird auch der Winkel $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, dann liegt die zugehörige Schneckenlinie auf einem nicht abgeplatteten, geraden Globoide. Diese *Regelflächen* sind *von der ersten Art*; sie sind die einfachsten Formen. Ihre Erzeugenden gehören dem Normalensysteme einer Schar konzentrischer Wulstflächen an. Der Leitkreis und die Rotationsachse sind die Brennlinien der Kongruenz (S. 24). Danach ist

$$\bar{x}_2 = \bar{y}_2 = 0, \quad \bar{z}_2 = \operatorname{tg} u.$$

Man kann die globoidischen Regelflächen dritter Art folgendermaßen entstehen lassen:

Wird eine Schar der Erzeugenden eines einschaligen Rotationshyperboloides, die den Kehlkreis vom Radius Eins unter dem konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \gamma$ schneiden, von ∞^1 Geraden, die in den Normalebenen des Hyperboloids längs dieser Erzeugenden liegen, unter dem konstanten Winkel ε geschnitten und denkt man sich die Geraden mit den Erzeugenden fest verbunden, so gehen die Geraden in die Erzeugenden der Regelfläche dritter Art über, wenn die Erzeugenden des Hyperboloids um sich selbst um Winkel gedreht werden, die proportional sind der Bogenlänge des Kehlkreises bis zu dem zugehörigen Punkte, von einem bestimmten an gerechnet.

Die Entstehungsweise vereinfacht sich für die Regelfläche zweiter bezw. erster Art, wo $\gamma = \frac{\pi}{2}$ bezw. $\varepsilon = \gamma = \frac{\pi}{2}$ wird.

Die Flächen zweiter Art können auch, wie folgt, erzeugt werden:

Wird die Achse einer Schraubenfläche, die die Erzeugenden unter einem konstanten Winkel ε schneidet, so verbogen, daß sie in einen Kreis übergeht, der Winkel ε konstant und die Erzeugenden gradlinig bleiben, dann wird die Schraubenfläche zu einer globoidischen Regelfläche zweiter Art.

Für die Erzeugung der Regelfläche erster Art kann eine gewöhnliche Schraubenfläche benutzt werden.

2. Die globoidischen Regelflächen erster Art.

α) Ihre Gleichungen und ihre sphärischen Bilder.

Das Strahlensystem, dem die Erzeugenden dieser Regelflächen angehören, besitzt die Gleichungen:

$$\xi_0 = \sin v + t \sin v \cos u, \quad \eta_0 = -\cos v - t \cos v \cos u, \quad \zeta_0 = -t \sin u.$$

Dann wird die Regelfläche erster Art dargestellt durch:

$$(2)\quad \xi = \sin v + t \sin kv \sin v, \quad \eta = -\cos v - t \sin kv \cos v, \quad \zeta = t \cos kv,$$

oder in Zylinderkoordinaten:

$$(2')\qquad \zeta = \frac{l-1}{\operatorname{tg} kv},$$

worin $l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ist. In Kartesischen Koordinaten erhält man

(3) für $k = \frac{1}{2}$: $(y - xz)^2 - (y - z)(x^2 + y^2) = 0$, also eine Fläche dritter Ordnung;

(4) für $k = 1$: $(zy + x)^2 - x^2(x^2 + y^2) = 0$, eine Fläche vierter Ordnung;

(5) für $k = 2$: $(xyz + x^2 - y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 (x^2 + y^2) = 0$, eine Fläche sechster Ordnung;

(6) für $k = 3$: $[yz(3x^2 - y^2) + x(x^2 - 3y^2)]^2 - x^2(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2)^2$, eine Fläche achter Ordnung.

Wenn k eine ganze Zahl bedeutet, ist die Regelfläche von der Ordnung $2(k+1)$. In den Gleichungen (2) sind die Faktoren von t die Richtungskosinus der Erzeugenden und daher die Koordinaten des sphärischen Bildes der Regelfläche. Sie stellen Clelien des Guido-Grandi dar. Es gilt:

Die sphärischen Bilder der globoidischen Regelflächen erster Art sind Clelien des Guido-Grandi.

β) Der Schnitt dieser Flächen mit Kugeln und Ebenen und die Doppellinien der Flächen.

Die globoidischen Regelflächen erster Art sollen mit solchen Kugeln zum Schnitt gebracht werden, deren Mittelpunkte auf der Achse der Flächen liegen und die den Leitkreis enthalten. Dann schneidet die Kugel jede Erzeugende der Fläche außer in

dem zugehörigen Punkte des Kreises noch in einem zweiten Punkte, der von dem ersten den Abstand

$$t = -2\mathfrak{r}\sin(k\varphi - \varepsilon)$$

hat, wo $\mathfrak{r}$ der Radius der Kugel ist (Fig. 16).

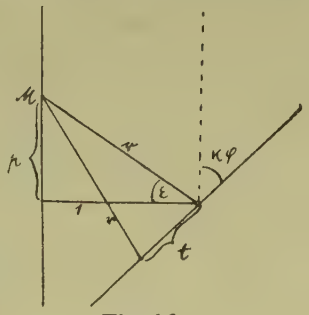

Fig. 16.

Aus (2) ergeben sich die Gleichungen der Schnittkurve:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\,[1 - 2\mathfrak{r}\sin k\varphi\sin(k\varphi - \varepsilon)], \\ y = \sin\varphi\,[1 - 2\mathfrak{r}\sin k\varphi\sin(k\varphi - \varepsilon)], \\ z = \quad -2\mathfrak{r}\cos k\varphi\sin(k\varphi - \varepsilon)], \end{cases}$$

die eine Clelie des Guido-Grandi darstellen. Ihre Projektion auf die xy-Ebene ist eine Rosenkurve mit der Gleichung:

$$\varrho = \mathfrak{r}\cos(2k\varphi - \varepsilon).$$

Es gilt daher:

Alle Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Achse der globoidischen Regelflächen erster Art liegen und die durch den Leitkreis der Fläche gehen, schneiden sie in Clelien des Guido-Grandi mit $2k$-Blättern.

Für $k = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Vivianische Kurve.[1]) Die Projektionen auf die xy-Ebene sind Rosenkurvenbüschel.

Die Flächen (4), (5) und (6) besitzen eine, bezw. zwei, bezw. drei Doppelerzeugende. Die Schnittkurven von Ebenen durch eine Doppelerzeugende der Regelfläche mit dieser ist von der Ordnung $2k$, wenn k eine ganze Zahl ist. Wird die Fläche (4) mit der Ebene, die durch die einzige Doppelerzeugende geht,[2])

$$z = -x\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

zum Schnitt gebracht, so ergeben sich Schnittkurven, deren Projektionen auf die xy-Ebene die Polargleichung haben

$$\varrho = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\sin\omega},$$

---

[1]) J. Krames, Wiener Sitz.-Ber. 127, 1918, S. 571. Über eine Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist.

[2]) Rohn, Über Regelflächen vierter Ordnung. Mathem. Annalen. Bd. 28, S. 298.

also Kegelschnitte sind. Fig. 17 stellt die Anordnung der Kegelschnitte dar.

Wir fassen das Ergebnis mit einigen leicht ersichtlichen Behauptungen zusammen:

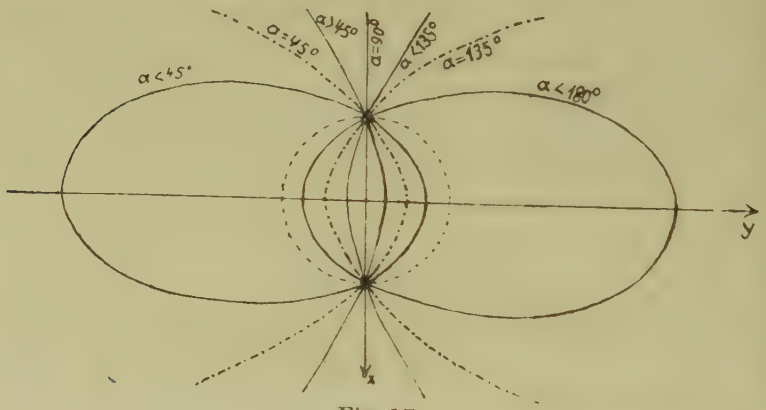

Fig. 17.

Die globoidische Regelfläche vierter Ordnung wird von einem Ebenenbüschel, dessen Träger die einzige Doppelerzeugende der Fläche ist, in einer Schar von Kegelschnitten getroffen, die sämtlich durch die beiden Erzeugenden der Fläche hindurchgehen, die senkrecht auf der horizontalen Symmetrieebene der Fläche stehen. Für alle Schnittkurven ist der Mittelpunkt der Fläche ein gemeinsamer Brennpunkt. Die beiden Ebenen, die Parabelschnitte liefern, sind wechselseitig Asymptoten- und Zentralebenen der Doppelerzeugenden; ihre Mittelpunkte liegen im Abstande $\pm \frac{1}{2}$ *vom Mittelpunkte der Fläche.*

Wird die Fläche (5) mit der Ebene

$$z = (y - x) \operatorname{tg} \alpha$$

geschnitten, dann lautet die Gleichung der Projektion der Schnittkurve auf die xy-Ebene:

$$(x + y - xy \operatorname{tg} \alpha)^2 = (x^2 + y^2)(x + y)^2,$$

oder in Polarkoordinaten:

$$\varrho = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \dfrac{\sin \omega \cos \omega}{\sin \omega + \cos \omega}}.$$

Faßt man α als Parameter auf, dann ergibt sich folgendes Bild der Kurvenschar:

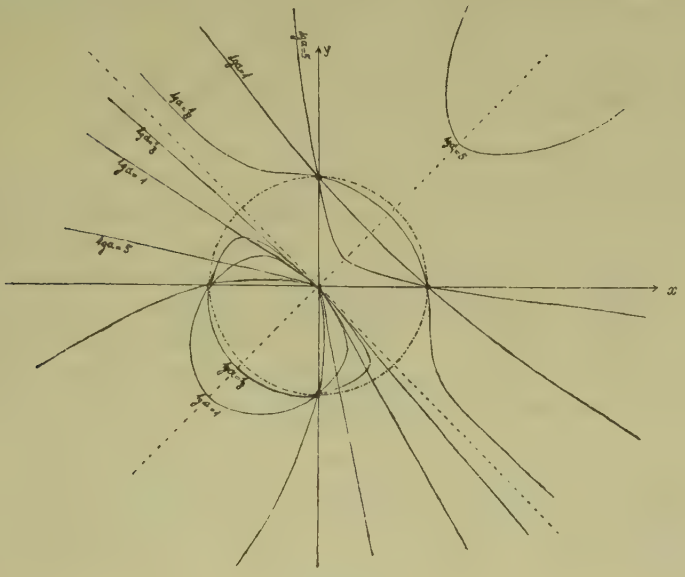

Fig. 18.

Entsprechend verlaufen die Kurven, wenn die zweite Doppelerzeugende zum Träger des Ebenenbüschels gemacht wird.

Sämtliche Schnittkurven gehen wieder durch die vier vertikalen Erzeugenden der Regelfläche.

Die Einheitskugel um den Mittelpunkt der globoidischen Regelfläche schneidet diese in einer Clelie. Eine Ebene durch die Achse der Fläche schneidet die Clelie sowie den Einheitskreis in den vier Punkten mit den Koordinaten

$$\begin{cases} x_{1,2} = \cos\varphi_0 \cos 2k\varphi_0, \\ y_{1,2} = \sin\varphi_0 \cos 2k\varphi_0, \\ z_{1,2} = \pm \sin 2k\varphi_0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{3,4} = \pm \cos\varphi_0, \\ y_{3,4} = \pm \sin\varphi_0, \\ z_{3,4} = 0. \end{cases}$$

Die Gerade durch die Punkte 1 und 3 schneidet die Gerade durch die Punkte 2 und 4 in dem Punkte mit den Koordinaten:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\varphi_0}{\cos 2k\varphi_0}, \\ y = \dfrac{\sin\varphi_0}{\cos 2k\varphi_0}, \\ z = \operatorname{tg} 2k\varphi_0. \end{cases}$$

Wird φ_0 als Parameter betrachtet, so stellen die *Gleichungen die Doppellinie der Fläche* dar. Die Kurve liegt auf der Fläche

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

und hat als Projektion auf die xy-Ebene eine Kurve mit der Polargleichung:

$$\varrho = \frac{1}{\cos 2k\varphi_0}.$$

Die Doppelkurve der globoidischen Regelfläche erster Art ist die Schnittkurve eines gleichseitigen, koachsialen Rotationshyperboloides, dessen Kehlkreis der Leitkreis der Fläche ist, mit dieser Fläche. Die Doppelkurve geht durch die Knotenpunkte der zugehörigen Clelie, und ihre Projektion auf die Ebene des Leitkreises ist die Inverse der der Clelie entsprechenden Rosenkurve.

Für $k = \frac{1}{2}$ ist eine Tangente im Knotenpunkte der Vivianischen Kurve die Doppellinie der globoidischen Regelfläche dritter Ordnung.[1]) Wenn $2k$ gerade ist, wird nur eine Umgrenzung der Clelie (entweder die obere oder die untere) von einer Erzeugenden getroffen. Dann gibt es keine eigentliche Doppelkurve der Fläche, falls man von der Achse der Fläche, auf der sich die Erzeugenden schneiden, absieht.

γ) Der Verteilungsparameter und die Striktionslinie der Flächen.

Die *Orthogonaltrajektorien* der Erzeugenden der globoidischen Regelflächen erster Art sind Globoidschneckenlinien. Der Leitkreis, der selbst zu den Orthogonaltrajektorien gehört, ist der Grenzfall einer Globoidschneckenlinie.

Es ist der Minimalabstand benachbarter Erzeugenden

$$d\sigma = \sqrt{\frac{A \sin^2 \vartheta - B^2}{A}}\, dv$$

und ihr kleinster Winkel,[2]) d. h. das Bogenelement der sphärischen Indikatrix: $d\varphi^2 = A\, dv^2$. Da $A = \Sigma X'^2 = k^2 + \sin^2 kv$ und

[1]) Vgl. J. Krames, a. a. O. S. 565.

[2]) L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 219.

$B = \Sigma(X' x_1') = \sin kv$, worin X', Y', Z'; x_1', y_1', z_1' die Ableitungen nach v der Richtungskosinus der Erzeugenden und der Koordinaten des Leitkreises der Fläche sind, so ergibt sich:

$$d\sigma = \frac{k\,dv}{\sqrt{k^2 + \sin^2 kv}} \quad \text{und} \quad d\varphi = \sqrt{k^2 + \sin^2 k\varphi}\, dv.$$

Der *Verteilungsparameter* der Linienfläche wird definiert durch $\mathfrak{R} = \frac{d\sigma}{d\varphi}$.[1]) Für globoidische Regelflächen erster Art erhält man:

$$\mathfrak{R} = \frac{k}{k^2 + \sin^2 kv}. \tag{7}$$

Wird $k = 1$, dann gilt:

Der Verteilungsparameter globoidischer Regelflächen, deren sphärisches Bild eine Vivianische Kurve ist, liegt zwischen $\frac{1}{2}$ *und* 1.

Die Abszissen der Punkte der Striktionslinie sind gegeben durch

$$T = -\frac{B}{A}.$$[2])

Für die betrachteten Regelflächen erhält man:

$$T = -\frac{\sin kv}{k^2 + \sin^2 kv}.$$

Mittels der Gleichungen (2) der S. 38 ergibt sich die *Darstellung der Striktionslinie:*

$$\mathfrak{x} = \frac{k^2 \sin v}{k^2 + \sin^2 kv}, \quad \mathfrak{y} = -\frac{k^2 \cos v}{k^2 + \sin^2 kv}, \quad \mathfrak{z} = -\frac{\sin kv \cos kv}{k^2 + \sin^2 kv}, \tag{8}$$

die Polargleichung der Projektion der Striktionslinie auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene ist:

$$r = \frac{k^2}{k^2 + \sin^2 kv}, \tag{9}$$

wobei v von der negativen $\mathfrak{y}$-Achse an zu zählen ist. Ein Vergleich mit der Gleichung (7) liefert folgende geometrische Interpretation des Verteilungsparameters:

---

[1]) Schell-Salkowski, a. a. O. S. 77.

[2]) L. Bianchi, a. a. O. S. 220.

Der Verteilungsparameter einer globoidischen Regelfläche erster Art ist gleich dem k. Teil des Radiusvektors der Projektion der Striktionslinie auf die Ebene der Leitkurve.

Ist $k = \frac{1}{2}$, so folgt:

$$r = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos v} \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\mathfrak{x}} = -2,$$

d. h. in diesem Falle ist die Striktionslinie eine ebene Ellipse, deren einer Brennpunkt der Mittelpunkt der Fläche ist.[1])

Die Kurve mit der Polargleichung $\varrho = \sin^2 kv = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2kv$ mag als *mehrfaches Oval* bezeichnet werden. Sie ist eine gewöhnliche Konchoide der Rosenkurve $r_0 = \cos 2kv$. Im Unterschiede zu den Rosenkurven werden die mehrfachen Ovale so durchlaufen, daß immer Spitzen entstehen, die Ovale also der Reihe nach aufeinanderfolgen, und daß auch dann, wenn k ungerade ist, ihre Anzahl gleich $2k$ ist.

Die Kurve

$$\varrho_1 = k^2 + \sin^2 kv$$

ist eine gewöhnliche Konchoide des mehrfachen Ovals und die Kurve (9) die Inverse dieser Kurve mit dem Pole als Inversionszentrum und $\varrho_1 r = k^2$ als Potenz. Demnach gilt:

Die Projektion der Striktionslinie einer globoidischen Regelfläche mit einer Clelie des Guido-Grandi als sphärischem Bilde ist die Inverse eines k-fachen Ovals, d. h. einer gewöhnlichen Rosenkurvenkonchoide.

Wird $k = 1$, so geht die Clelie in die Vivianische Kurve und das mehrfache Oval in die Müngersche Doppeleilinie[2]) über, die eine gewöhnliche Konchoide der vierblättrigen Rosenkurve ist.

[1]) J. Krames, a. a. O. S. 577.

[2]) F. Münger, Die eiförmigen Kurven, Diss., Bern 1894. — Gino Loria, Spezielle algebr. und transzendente Kurven. I. Bd. S. 374. 2. Aufl. 1910.

3. Die globoidischen Regelflächen zweiter und dritter Art.

Die globoidischen Regelflächen zweiter Art gehören der Evolutoidenkongruenz eines ebenen Kreises an, deren Gleichungen sich aus (3) S. 19 ergeben, wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird. Daraus folgen dann die *Gleichungen der Regelflächen zweiter Art:*

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi = & \sin v + t\,[\sin\varepsilon \sin kv \sin v + \cos\varepsilon \cos v], \\ \eta = & -\cos v - t\,[\sin\varepsilon \sin kv \cos v - \cos\varepsilon \sin v], \\ \zeta = & \quad t \sin\varepsilon \cos v. \end{cases}$$

Die Faktoren von t liefern das sphärische Bild der Regelflächen, dessen Projektion auf die $\xi\eta$-Ebene für $k = 1$ dargestellt wird durch:

$$\xi' = \sin\varepsilon \sin^2 v + \cos\varepsilon \cos v, \quad \eta' = -\sin\varepsilon \sin v \cos v + \cos\varepsilon \sin v.$$

Diese Kurve ist eine schiefe Kreiskonchoide, deren Basis den Durchmesser $\sin\varepsilon$, deren Zwischenstück die Länge $\cos\varepsilon$ hat und senkrecht auf dem beschreibenden Radiusvektor steht (Fig. 7 b). Ist $k \neq 1$, so ist die Basis der Konchoide eine Rosenkurve mit einem Fundamentalkreis vom Radius $\sin\varepsilon$. Demnach gilt:

Das sphärische Bild einer globoidischen Regelfläche zweiter Art ist die Schnittlinie der Einheitskugel und eines Zylinders mit schiefer Rosenkurvenkonchoide (eventuell Pascalscher Schneckenlinie) als Orthogonalschnitt.

Der Leitkreis ist eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden der Regelfläche zweiter Art. Die Geraden, die den Kreis nach der auf S. 37 angegebenen Entstehungsweise unter dem konstanten Winkel ε schneiden, umhüllen als Evolutoide einen zweiten Kreis vom Radius $\cos\varepsilon$ und werden von den Evolventen dieses Kreises orthogonal geschnitten. Daher gilt:

Die Orthogonaltrajektorien der globoidischen Regelflächen zweiter Art gehen aus den Evolventen eines Kreises hervor.

Die ∞^1 Geraden, von denen bei der Erzeugung der Regelflächen dritter Art ausgegangen wurde, umhüllen ein Rotationshyperboloid.

Die Orthogonaltrajektorien der Regelflächen dritter Art gehen aus den Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden eines Rotationshyperboloides hervor.

Der Leitkreis schneidet die Erzeugenden der Regelflächen zweiter und dritter Art unter dem konstanten Winkel ε. Infolgedessen ergibt sich aus der Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien

$$dt + \cos\varepsilon\, dv = 0$$

für t der Wert $\bar{a} - v\cos\varepsilon$, hierin ist $\bar{a}$ eine willkürliche Konstante. Setzt man sie gleich Null, so ergibt sich:

Die Entfernung (Abszisse) der Orthogonaltrajektorien der globoidischen Regelflächen zweiter und dritter Art von dem ebenen Kreise ist proportional dem Winkel v.

Aus den Gleichungen (10) erhält man diejenigen der Orthogonaltrajektorien der globoidischen Regelflächen zweiter Art, wenn man t durch $\bar{a} - v\cos\varepsilon$ ersetzt.

Am Schlusse dieser Arbeit erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Gutzmer, sowie Herrn Professor Dr. E. Salkowski in Hannover für die freundliche Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen und für die wertvollen Ratschläge bei ihrer Ausführung ergebenst zu danken.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Ernst Neubauer, Sohn des Privatmanns Otto Neubauer und seiner Ehefrau Martha geb. Pöschel, am 20. Juli 1893 zu Magdeburg. Ich bin evangelischen Bekenntnisses und preußischer Staatsangehöriger. Ich besuchte die I. Bürger-Knabenschule zu Magdeburg, die Präparandenanstalt zu Genthin und das Lehrerseminar zu Eilenburg, das ich Ostern 1913 nach bestandener erster Lehrerprüfung verließ. Nach privater Vorbereitung erwarb ich Ostern 1916 am Realgymnasium zu Langensalza das Reifezeugnis. Vom Sommersemester 1916 an studierte ich in Halle Mathematik, Physik und Philosophie. Unterbrochen wurde mein Studium durch Heeres- und vaterländischen Hilfsdienst vom Wintersemester 1916 bis Ende 1918. Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 24. Juli 1921.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren: Buchholz †, Eberhard, Frischeisen-Köhler, Grammel, Gutzmer, Herweg, Jung, Menzer, Mie, Prange, Schmidt, Wangerin, Wigand, Ziehen.

Allen meinen verehrten Lehrern fühle ich mich zu dauerndem Danke verpflichtet.